Algebra1, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

2. előadás

Vektorok és helyvektorok

Ismétlés

A sík vektorai irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak,

Vektorok és helyvektorok

Ismétlés

A sík vektorai irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak

Vektorok és helyvektorok

Ismétlés

A sík vektorai irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Vektorok és helyvektorok

Ismétlés

A sík vektorai irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.

Vektorok és helyvektorok

Ismétlés

A sík vektorai irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
A sík minden pontját egyértelműen kijelöli egy ilyen $\overrightarrow{OA}$ vektor A végpontja.

Vektorok és helyvektorok

Ismétlés

A sík vektorai irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
A sík minden pontját egyértelműen kijelöli egy ilyen $\overrightarrow{OA}$ vektor A végpontja. Ez az A pont helyvektora.

Vektorok és helyvektorok

Ismétlés

A sík vektorai irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
A sík minden pontját egyértelműen kijelöli egy ilyen $\overrightarrow{OA}$ vektor A végpontja. Ez az A pont helyvektora.

Jelölés

Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató vektort szintén az (a, b) számpárral adjuk meg.

Vektorok és helyvektorok

Ismétlés

A sík vektorai irányított szakaszok, de két vektor egyenlő, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható.
A sík minden pontját egyértelműen kijelöli egy ilyen $\overrightarrow{OA}$ vektor A végpontja. Ez az A pont helyvektora.

Jelölés

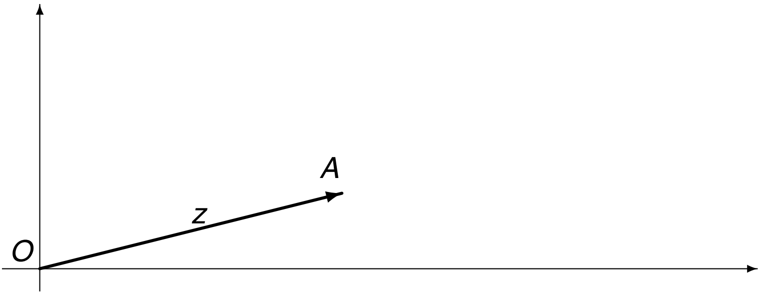
Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató vektort szintén az (a, b) számpárral adjuk meg.
Tehát beszélhetünk a $z = (a, b) = \overrightarrow{OA}$ vektorról.

Vektorösszeadás

A vektorok összeadása egymás után fűzéssel történik:

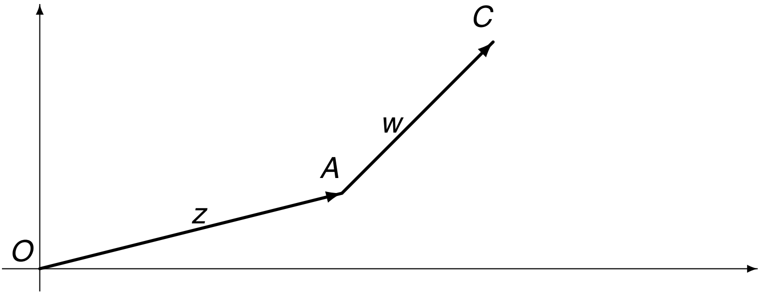
Vektorösszeadás

A vektorok összeadása egymás után fűzéssel történik:
$\overrightarrow{OA}$



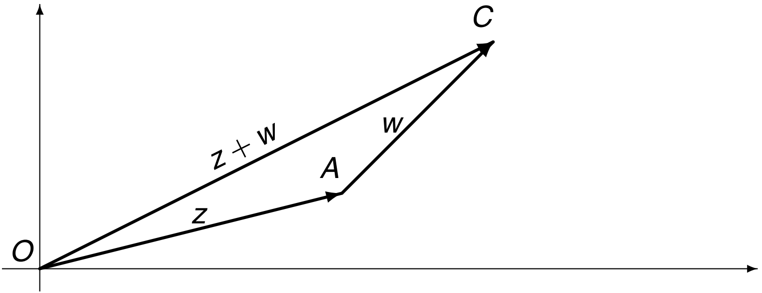
Vektorösszeadás

A vektorok összeadása egymás után fűzéssel történik:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} =$



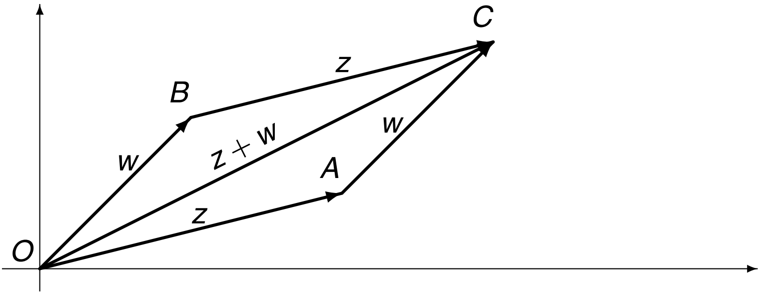
Vektorösszeadás

A vektorok összeadása egymás után fűzéssel történik:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.



Vektorösszeadás

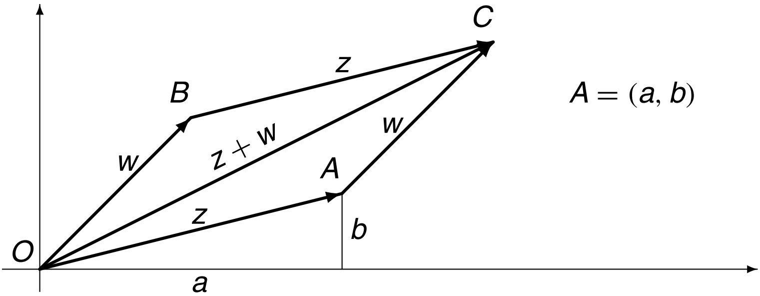
A vektorok összeadása egymás után fűzéssel történik:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.



Ez a paralelogramma-szabály, hiszen $OACB$ paralelogramma.

Vektorösszeadás

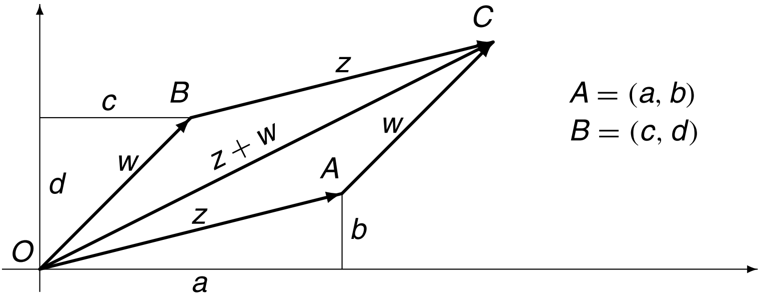
A vektorok összeadása egymás után fűzéssel történik:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.



Ez a paralelogramma-szabály, hiszen $OACB$ paralelogramma.
A $z = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = (a, b)$

Vektorösszeadás

A vektorok összeadása egymás után fűzéssel történik:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.

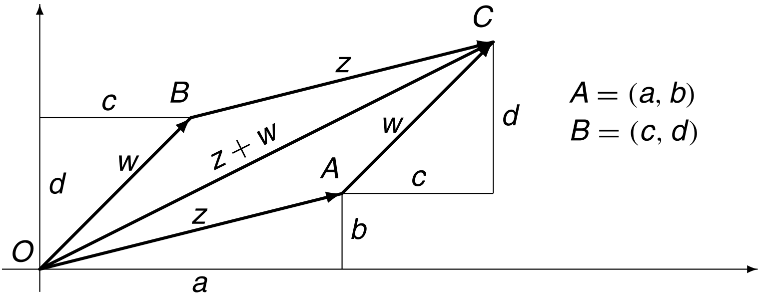


$A = (a, b)$
$B = (c, d)$

Ez a paralelogramma-szabály, hiszen $OACB$ paralelogramma.
A $z = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = (a, b)$ és $w = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = (c, d)$ vektorok összege

Vektorösszeadás

A vektorok összeadása egymás után fűzéssel történik:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.

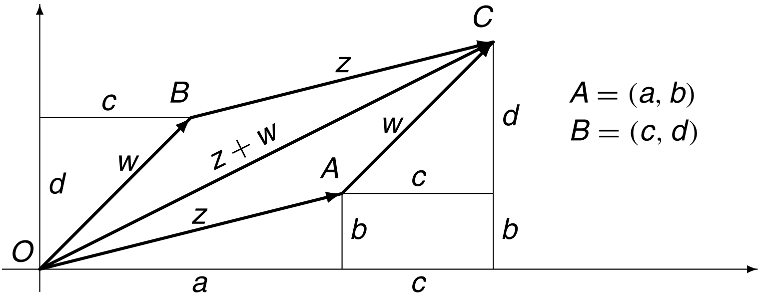


$A = (a, b)$
$B = (c, d)$

Ez a paralelogramma-szabály, hiszen $OACB$ paralelogramma.
A $z = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = (a, b)$ és $w = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = (c, d)$ vektorok összege

Vektorösszeadás

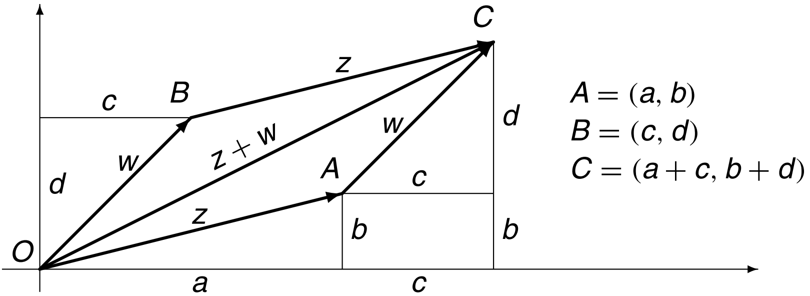
A vektorok összeadása egymás után fűzéssel történik:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.



Ez a paralelogramma-szabály, hiszen $OACB$ paralelogramma.
A $z = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = (a, b)$ és $w = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = (c, d)$ vektorok összege

Vektorösszeadás

A vektorok összeadása egymás után fűzéssel történik:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.



Ez a paralelogramma-szabály, hiszen *OACB* paralelogramma.
A $z = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = (a, b)$ és $w = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = (c, d)$ vektorok összege $z + w = \overrightarrow{OC} = (a + c, b + d)$.

A komplex számsík

Ahogy a valós számokat a számegyenesre képzeljük,
az $a + bi$ komplex számot a sík (a, b) pontjával ábrázoljuk.

A komplex számsík

Ahogy a valós számokat a számegyenesre képzeljük,
az $a + bi$ komplex számot a sík (a, b) pontjával ábrázoljuk.

Például $i = 0 + 1i$ a $(0, 1)$ pontnak felel meg.

A komplex számsík

Ahogy a valós számokat a számegyenesre képzeljük, az $a + bi$ komplex számot a sík (a, b) pontjával ábrázoljuk.

Például $i = 0 + 1i$ a $(0, 1)$ pontnak felel meg.

A valós számok az x-tengelyen helyezkednek el, ennek neve valós tengely.

A komplex számsík

Ahogy a valós számokat a számegyenesre képzeljük, az $a + bi$ komplex számot a sík (a, b) pontjával ábrázoljuk.

Például $i = 0 + 1i$ a $(0, 1)$ pontnak felel meg.

A valós számok az x-tengelyen helyezkednek el, ennek neve valós tengely.
A tisztán képzetes számok az y-tengelyen vannak, ennek neve képzetes tengely.

A komplex számsík

Ahogy a valós számokat a számegyenesre képzeljük, az $a + bi$ komplex számot a sík (a, b) pontjával ábrázoljuk.

Például $i = 0 + 1i$ a $(0, 1)$ pontnak felel meg.

A valós számok az x-tengelyen helyezkednek el, ennek neve valós tengely.
A tisztán képzetes számok az y-tengelyen vannak, ennek neve képzetes tengely.

Az (a, b)-be mutató helyvektort is azonosítjuk $a + bi$-vel.

A komplex számsík

Ahogy a valós számokat a számegyenesre képzeljük,
az $a + bi$ komplex számot a sík (a, b) pontjával ábrázoljuk.

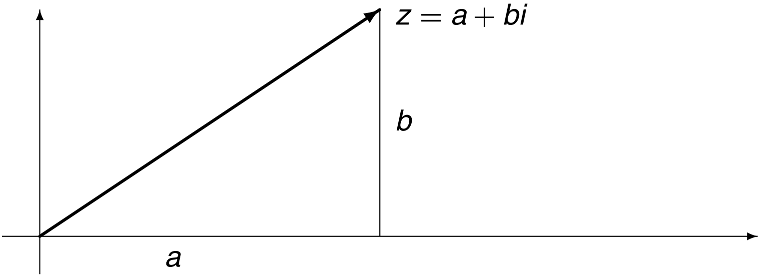
Például $i = 0 + 1i$ a $(0, 1)$ pontnak felel meg.

A valós számok az x-tengelyen helyezkednek el,
ennek neve valós tengely.
A tisztán képzetes számok az y-tengelyen vannak,
ennek neve képzetes tengely.

Az (a, b)-be mutató helyvektort is azonosítjuk $a + bi$-vel.
Mivel $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, ezért
a komplex számokat ugyanúgy kell összeadni,
mint a nekik megfelelő helyvektorokat.

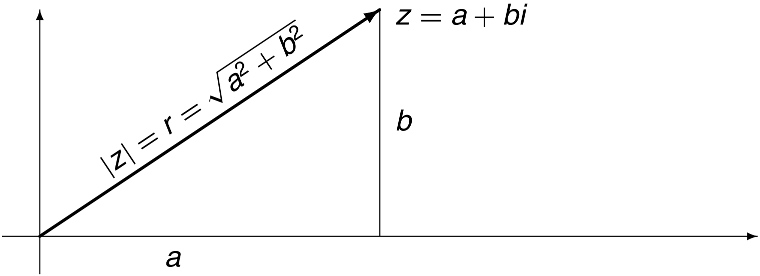
Komplex szám hossza és szöge

A $z = a + bi$ hossza az origótól mért távolsága.



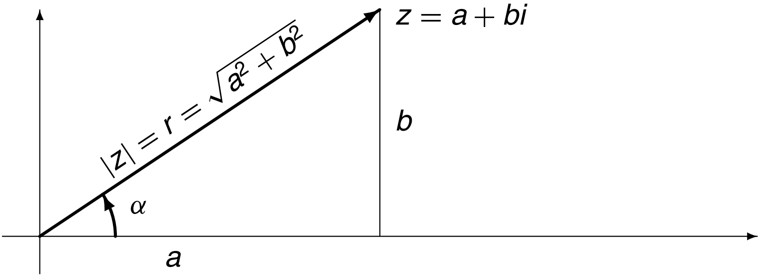
Komplex szám hossza és szöge

A $z = a + bi$ hossza az origótól mért távolsága.
Pitagorasz tétele szerint ez $\sqrt{a^2 + b^2}$, azaz $|z|$.



Komplex szám hossza és szöge

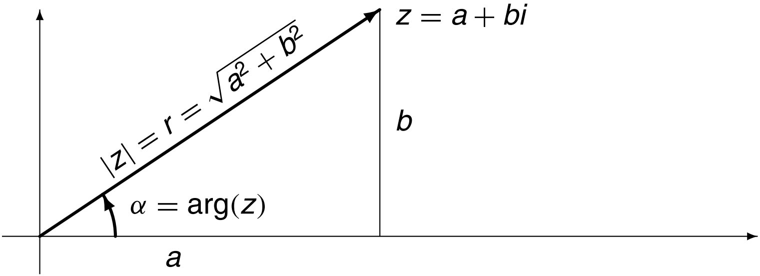
A $z = a + bi$ hossza az origótól mért távolsága.
Pitagorasz tétele szerint ez $\sqrt{a^2 + b^2}$, azaz $|z|$.



A $z \neq 0$ szöge a valós tengely pozitív felével bezárt szög.

Komplex szám hossza és szöge

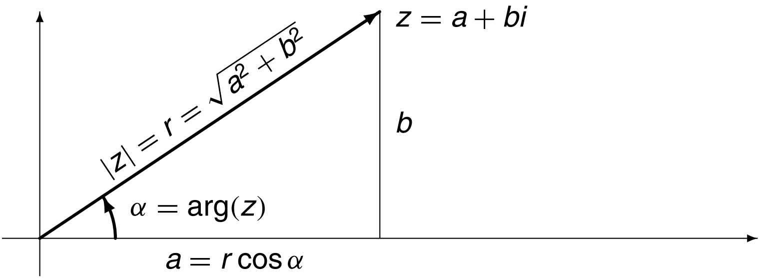
A $z = a + bi$ hossza az origótól mért távolsága.
Pitagorasz tétele szerint ez $\sqrt{a^2 + b^2}$, azaz $|z|$.



A $z \neq 0$ szöge a valós tengely pozitív felével bezárt szög.
Ez irányított szög, $0 \leq \arg(z) < 360^\circ$.

Komplex szám hossza és szöge

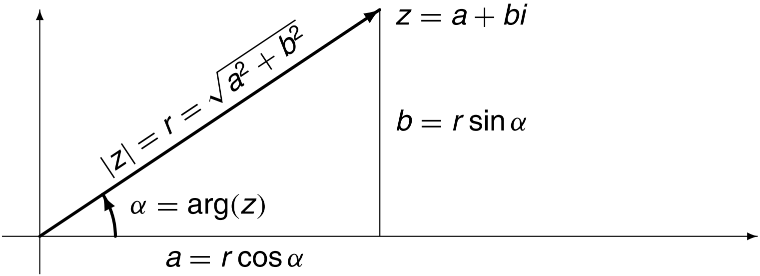
A $z = a + bi$ hossza az origótól mért távolsága.
Pitagorasz tétele szerint ez $\sqrt{a^2 + b^2}$, azaz $|z|$.



A $z \neq 0$ szöge a valós tengely pozitív felével bezárt szög.
Ez irányított szög, $0 \leq \arg(z) < 360^\circ$.
Nyilván $a = |z| \cos \alpha$

Komplex szám hossza és szöge

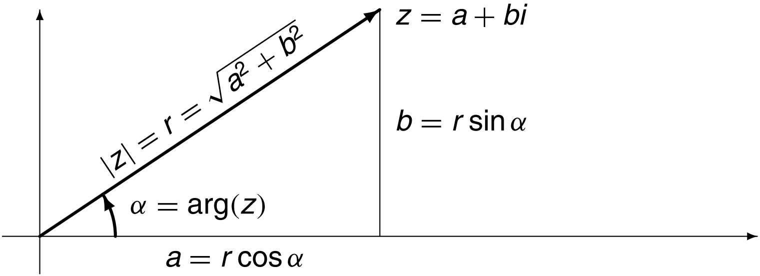
A $z = a + bi$ hossza az origótól mért távolsága.
Pitagorasz tétele szerint ez $\sqrt{a^2 + b^2}$, azaz $|z|$.



A $z \neq 0$ szöge a valós tengely pozitív felével bezárt szög.
Ez irányított szög, $0 \leq \arg(z) < 360^\circ$.
Nyilván $a = |z|\cos\alpha$ és $b = |z|\sin\alpha$.

Komplex szám hossza és szöge

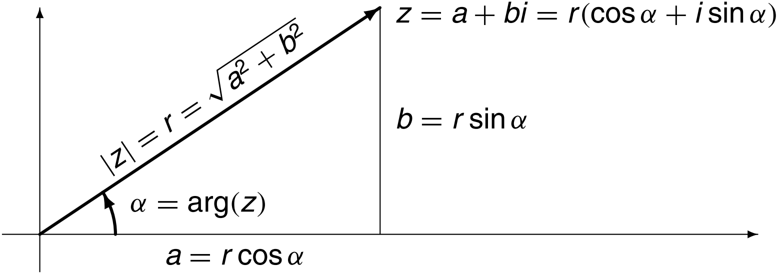
A $z = a + bi$ hossza az origótól mért távolsága.
Pitagorasz tétele szerint ez $\sqrt{a^2 + b^2}$, azaz $|z|$.



A $z \neq 0$ szöge a valós tengely pozitív felével bezárt szög.
Ez irányított szög, $0 \leq \arg(z) < 360^\circ$.
Nyilván $a = |z| \cos \alpha$ és $b = |z| \sin \alpha$.
Ezért z-t egyértelműen meghatározza a hossza és a szöge.

Komplex szám hossza és szöge

A $z = a + bi$ hossza az origótól mért távolsága.
Pitagorasz tétele szerint ez $\sqrt{a^2 + b^2}$, azaz $|z|$.



A $z \neq 0$ szöge a valós tengely pozitív felével bezárt szög.
Ez irányított szög, $0 \leq \arg(z) < 360^\circ$.
Nyilván $a = |z|\cos\alpha$ és $b = |z|\sin\alpha$.
Ezért z-t egyértelműen meghatározza a hossza és a szöge.

Komplex szám trigonometrikus alakja

Definíció

A $z \neq 0$ trigonometrikus alakja $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, ahol

Komplex szám trigonometrikus alakja

Definíció

A $z \neq 0$ trigonometrikus alakja $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $r = |z|$ a z szám hossza,

Komplex szám trigonometrikus alakja

Definíció

A $z \neq 0$ trigonometrikus alakja $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $r = |z|$ a z szám hossza, $\alpha = \arg(z)$ pedig a z szám szöge.

Komplex szám trigonometrikus alakja

Definíció

A $z \neq 0$ trigonometrikus alakja $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $r = |z|$ a z szám hossza, $\alpha = \arg(z)$ pedig a z szám szöge.
A $z = a + bi$ az algebrai alak.

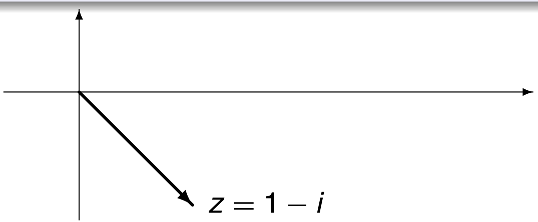
Komplex szám trigonometrikus alakja

Definíció

A $z \neq 0$ trigonometrikus alakja $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $r = |z|$ a z szám hossza, $\alpha = \arg(z)$ pedig a z szám szöge. A $z = a + bi$ az algebrai alak.

Példa

Az $1 - i$



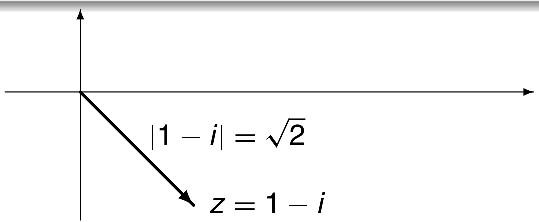
Komplex szám trigonometrikus alakja

Definíció

A $z \neq 0$ trigonometrikus alakja $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $r = |z|$ a z szám hossza, $\alpha = \arg(z)$ pedig a z szám szöge.
A $z = a + bi$ az algebrai alak.

Példa

Az $1 - i$ hossza $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.



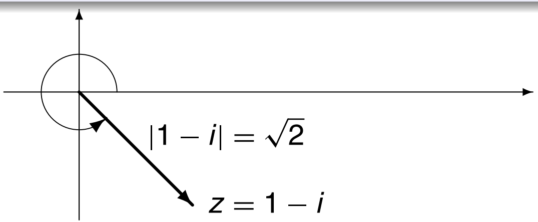
Komplex szám trigonometrikus alakja

Definíció

A $z \neq 0$ trigonometrikus alakja $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $r = |z|$ a z szám hossza, $\alpha = \arg(z)$ pedig a z szám szöge.
A $z = a + bi$ az algebrai alak.

Példa

Az $1 - i$ hossza $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Szöge 315° (nem 45°).



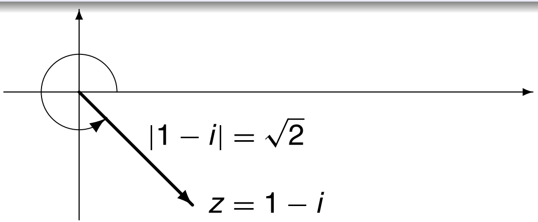
Komplex szám trigonometrikus alakja

Definíció

A $z \neq 0$ trigonometrikus alakja $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $r = |z|$ a z szám hossza, $\alpha = \arg(z)$ pedig a z szám szöge. A $z = a + bi$ az algebrai alak.

Példa

Az $1 - i$ hossza $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Szöge 315° (nem 45°). Így trigonometrikus alakja $1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$.



A trigonometrikus alak egyértelműsége

Példa

A -4 hossza (abszolút értéke) 4,

A trigonometrikus alak egyértelműsége

Példa

A -4 hossza (abszolút értéke) 4, szöge 180° (nem 0°).

A trigonometrikus alak egyértelműsége

Példa

A -4 hossza (abszolút értéke) 4, szöge 180° (nem 0°).
Így trigonometrikus alakja $-4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$.

A trigonometrikus alak egyértelműsége

Példa

A -4 hossza (abszolút értéke) 4, szöge 180° (nem 0°).
Így trigonometrikus alakja $-4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$.

Figyelem! A nullának nincs trigonometrikus alakja.

A trigonometrikus alak egyértelműsége

Példa

A -4 hossza (abszolút értéke) 4, szöge 180° (nem 0°).
Így trigonometrikus alakja $-4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$.

Figyelem! A nullának nincs trigonometrikus alakja.
Az $r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ szám nincs trigonometrikus alakban!

A trigonometrikus alak egyértelműsége

Példa

A -4 hossza (abszolút értéke) 4, szöge 180° (nem 0°).
Így trigonometrikus alakja $-4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$.

Figyelem! A nullának nincs trigonometrikus alakja.
Az $r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ szám nincs trigonometrikus alakban!

Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ felírásban érdemes megengednünk olyan α szöget is, ahol $0 \le \alpha < 360^\circ$ nem feltétlenül teljesül.

A trigonometrikus alak egyértelműsége

Példa

A -4 hossza (abszolút értéke) 4, szöge 180° (nem 0°).
Így trigonometrikus alakja $-4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$.

Figyelem! A nullának nincs trigonometrikus alakja.
Az $r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ szám nincs trigonometrikus alakban!

Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ felírásban érdemes megengednünk olyan α szöget is, ahol $0 \leq \alpha < 360^\circ$ nem feltétlenül teljesül.

Például $1 - i = \sqrt{2}\big(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ)\big)$.

A trigonometrikus alak egyértelműsége

Példa

A -4 hossza (abszolút értéke) 4, szöge 180° (nem 0°).
Így trigonometrikus alakja $-4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$.

Figyelem! A nullának nincs trigonometrikus alakja.
Az $r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ szám nincs trigonometrikus alakban!

Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ felírásban érdemes megengednünk olyan α szöget is, ahol $0 \le \alpha < 360^\circ$ nem feltétlenül teljesül.

Például $1 - i = \sqrt{2}\big(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ)\big)$.

Állítás (HF ellenőrizni, Kiss-jegyzet 1.4.4.)

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha

A trigonometrikus alak egyértelműsége

Példa

A -4 hossza (abszolút értéke) 4, szöge 180° (nem 0°).
Így trigonometrikus alakja $-4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$.

Figyelem! A nullának nincs trigonometrikus alakja.
Az $r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ szám nincs trigonometrikus alakban!

Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ felírásban érdemes megengednünk olyan α szöget is, ahol $0 \le \alpha < 360^\circ$ nem feltétlenül teljesül.

Például $1 - i = \sqrt{2}\big(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ)\big)$.

Állítás (HF ellenőrizni, Kiss-jegyzet 1.4.4.)

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$

A trigonometrikus alak egyértelműsége

Példa

A -4 hossza (abszolút értéke) 4, szöge 180° (nem 0°).
Így trigonometrikus alakja $-4 = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$.

Figyelem! A nullának nincs trigonometrikus alakja.
Az $r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ szám nincs trigonometrikus alakban!

Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ felírásban érdemes megengednünk olyan α szöget is, ahol $0 \leq \alpha < 360^\circ$ nem feltétlenül teljesül.

Például $1 - i = \sqrt{2}\big(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ)\big)$.

Állítás (HF ellenőrizni, Kiss-jegyzet 1.4.4.)

Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$.

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\Big($

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs($

Emlékeztető: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$.

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) +$

Emlékeztető: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$.

Emlékeztető: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$. Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Emlékeztető: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$.

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$. Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Példa

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ négyzete

$(1-i)^2 =$

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$. Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Példa

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ négyzete
$(1-i)^2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\big($

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$.
Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Példa

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ négyzete
$(1-i)^2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\big(\cos(315^\circ + 315^\circ)$

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$.
Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Példa

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ négyzete
$(1-i)^2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\big(\cos(315^\circ + 315^\circ) + i\sin(315^\circ + 315^\circ)\big)$

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$.
Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Példa

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ négyzete
$(1-i)^2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\big(\cos(315^\circ + 315^\circ) + i\sin(315^\circ + 315^\circ)\big) =$
$= 2(\cos 630^\circ + i\sin 630^\circ)$

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$. Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Példa

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ négyzete

$(1-i)^2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\big(\cos(315^\circ + 315^\circ) + i\sin(315^\circ + 315^\circ)\big) =$

$= 2(\cos 630^\circ + i\sin 630^\circ) = 2(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ) =$

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik. (modulo 360°)

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$.
Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Példa

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ négyzete

$(1-i)^2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\big(\cos(315^\circ + 315^\circ) + i\sin(315^\circ + 315^\circ)\big) =$

$= 2(\cos 630^\circ + i\sin 630^\circ) = 2(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ) =$

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik. (modulo 360°)

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$. Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Példa

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ négyzete

$(1-i)^2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\big(\cos(315^\circ + 315^\circ) + i\sin(315^\circ + 315^\circ)\big) =$

$= 2(\cos 630^\circ + i\sin 630^\circ) = 2(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ) =$

$= 2\big(0 + i(-1)\big) =$

Szorzás trigonometrikus alakban

Tétel

Komplex számok szorzásakor hosszuk összeszorzódik, szögük pedig összeadódik. (modulo 360°)

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor $zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$. Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Példa

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ négyzete

$$(1-i)^2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\big(\cos(315^\circ + 315^\circ) + i\sin(315^\circ + 315^\circ)\big) =$$
$$= 2(\cos 630^\circ + i\sin 630^\circ) = 2(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ) =$$
$$= 2\big(0 + i(-1)\big) = -2i.$$

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$$\left(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$(r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$\left(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$\left(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$\big(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\big)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Példa

$(1-i)^{1526} =$

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$\left(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Példa

$(1-i)^{1526} =$

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$$\left(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Példa

$$(1-i)^{1526} = \sqrt{2}^{1526}\Big($$

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$$

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$\big(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\big)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Példa

$(1-i)^{1526} = \sqrt{2}^{1526}\big(\cos(1526\cdot 315^\circ) + i\sin(1526\cdot 315^\circ)\big) =$

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$\left(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Példa

$(1-i)^{1526} = \sqrt{2}^{1526}\left(\cos(1526\cdot 315^\circ) + i\sin(1526\cdot 315^\circ)\right) =$
$= 2^{763}($

$1526/2 = 763$

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$\left(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$

Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Példa

$(1-i)^{1526} = \sqrt{2}^{1526}\left(\cos(1526\cdot 315^\circ) + i\sin(1526\cdot 315^\circ)\right) =$
$= 2^{763}($

$1526 \cdot 315 = 480690$

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$\big(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\big)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.
Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Példa

$(1-i)^{1526} = \sqrt{2}^{1526}\big(\cos(1526\cdot 315^\circ) + i\sin(1526\cdot 315^\circ)\big) =$
$= 2^{763}($

$1526 \cdot 315 = 480690 = 1335 \cdot 360 + 90$

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$\left(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$

Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Példa

$$(1-i)^{1526} = \sqrt{2}^{1526}\left(\cos(1526\cdot 315^\circ) + i\sin(1526\cdot 315^\circ)\right) =$$
$$= 2^{763}(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) =$$

$$1526\cdot 315 = 480690 = 1335\cdot 360 + 90$$

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$$\left(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Példa

$$(1-i)^{1526} = \sqrt{2}^{1526}\left(\cos(1526\cdot 315^\circ) + i\sin(1526\cdot 315^\circ)\right) =$$
$$= 2^{763}(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = 2^{763}(0+1i) =$$

$$1526\cdot 315 = 480690 = 1335\cdot 360 + 90$$

Hatványozás trigonometrikus alakban

Házi Feladat

Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete

$$\big(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\big)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Azaz hatványozáskor a hosszat a kitevőre emeljük,
a szöget a kitevővel szorozzuk.

A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

Példa

$$(1-i)^{1526} = \sqrt{2}^{1526}\big(\cos(1526\cdot 315^\circ) + i\sin(1526\cdot 315^\circ)\big) =$$
$$= 2^{763}(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = 2^{763}(0+1i) = 2^{763}i.$$

$$1526\cdot 315 = 480690 = 1335\cdot 360 + 90$$

A háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög-egyenlőtlenség

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$.

A háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög-egyenlőtlenség

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak,

A háromszög-egyenlőtlenség

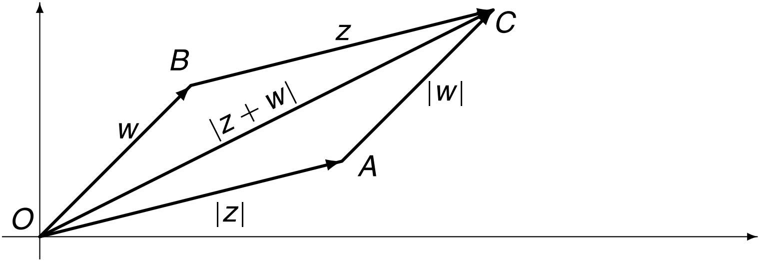
A háromszög-egyenlőtlenség

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak, azaz $z = rw$ vagy $w = rz$ alkalmas pozitív valós r-re.

A háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög-egyenlőtlenség

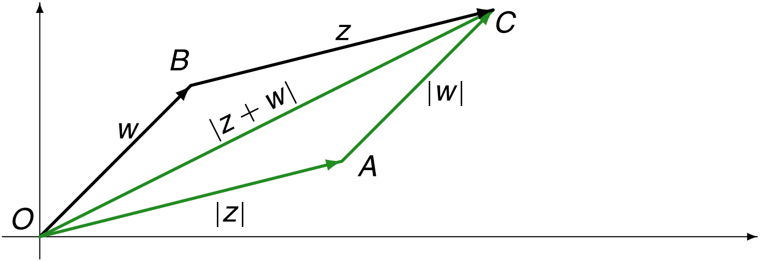
Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak, azaz $z = rw$ vagy $w = rz$ alkalmas pozitív valós r-re.



A háromszög-egyenlőtlenség

A háromszög-egyenlőtlenség

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z+w| \leq |z| + |w|$. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak, azaz $z = rw$ vagy $w = rz$ alkalmas pozitív valós r-re.



Bizonyítás

Háromszög-egyenlőtlenség az OAC háromszögre.

Két pont távolsága

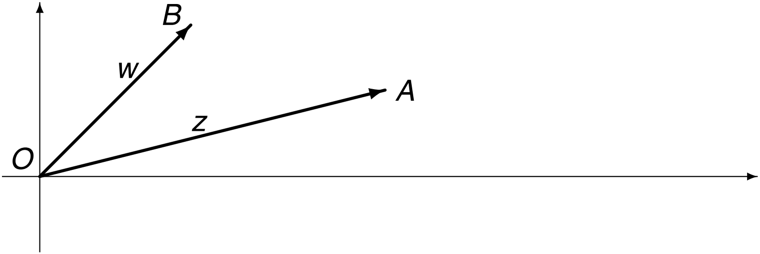
Állítás

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.

Két pont távolsága

Állítás

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



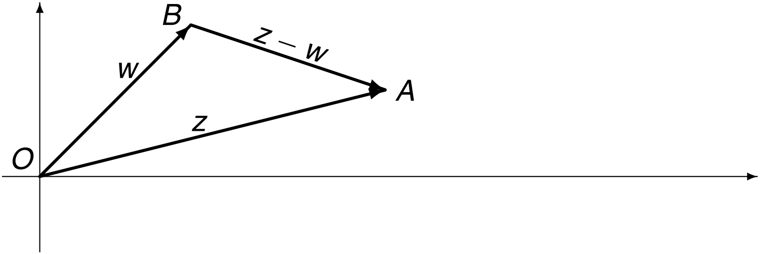
Bizonyítás

Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$.

Két pont távolsága

Állítás

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



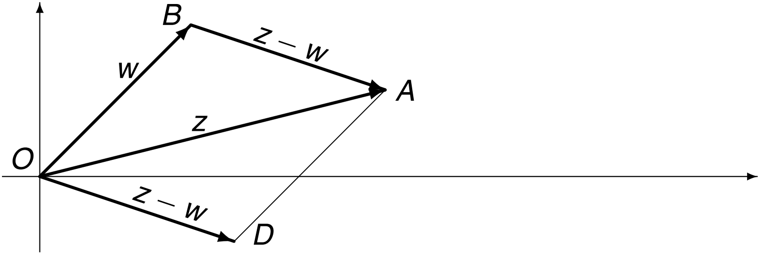
Bizonyítás

Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$. Ekkor $z - w = \overrightarrow{BA}$, hiszen $w + (z - w) = z$.

Két pont távolsága

Állítás

Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z-w|$.



Bizonyítás

Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$. Ekkor $z - w = \overrightarrow{BA}$, hiszen $w + (z - w) = z$. De $z - w$ hossza $|z - w|$.

Geometriai transzformációk

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Geometriai transzformációk

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás)

Geometriai transzformációk

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás:

Geometriai transzformációk

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül,

Geometriai transzformációk

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és $|w|$-szeresére nyújt az origóból.

Geometriai transzformációk

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$.

Geometriai transzformációk

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és $|w|$ hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Geometriai transzformációk

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,

Geometriai transzformációk

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és $|w|$ hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,
- zw hossza pedig z hosszának s-szerese.

Geometriai transzformációk

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való eltolás.

Állítás

Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) forgatva nyújtás: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

Bizonyítás

Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,
- zw hossza pedig z hosszának s-szerese.

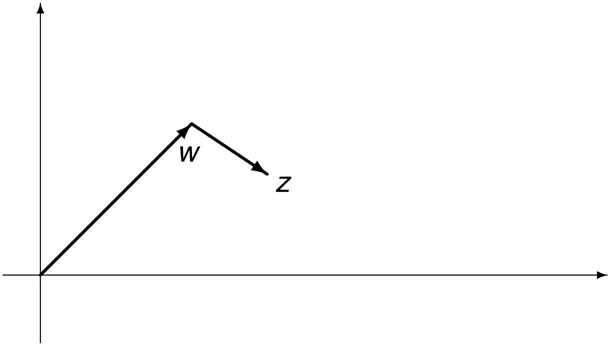
Így az f függvény a z vektort β-val forgatja, s-szeresére nyújtja.

Forgatás pont körül

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

Forgatás pont körül

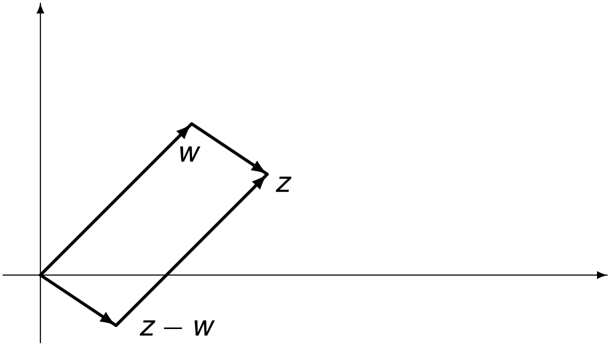
Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?



A w-ből z-be mutató $z - w$ vektort

Forgatás pont körül

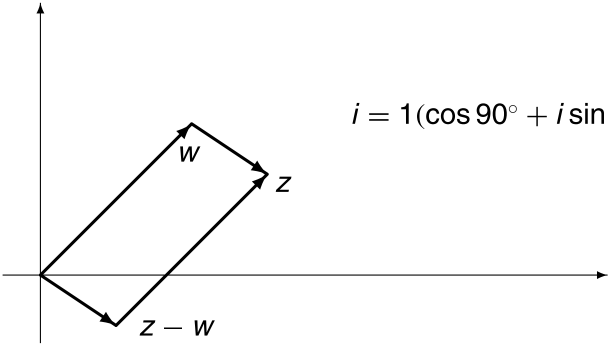
Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?



A w-ből z-be mutató $z - w$ vektort az origóba toljuk,

Forgatás pont körül

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

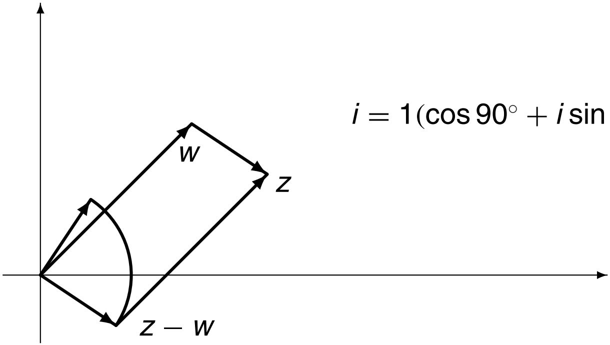


$$i = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

A w-ből z-be mutató $z - w$ vektort az origóba toljuk,

Forgatás pont körül

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

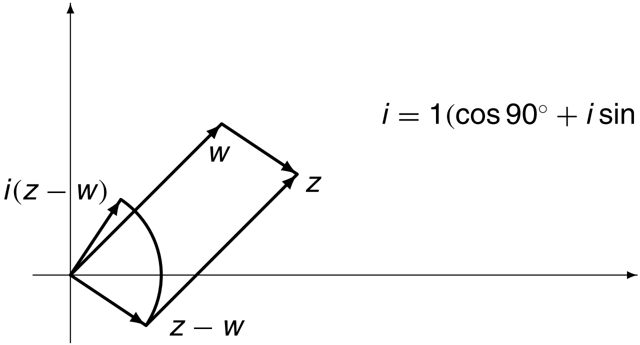


$$i = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

A w-ből z-be mutató $z - w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°),

Forgatás pont körül

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

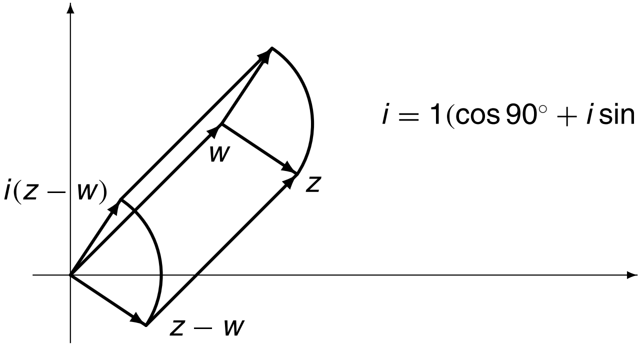


$i = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

A w-ből z-be mutató $z-w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°),

Forgatás pont körül

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

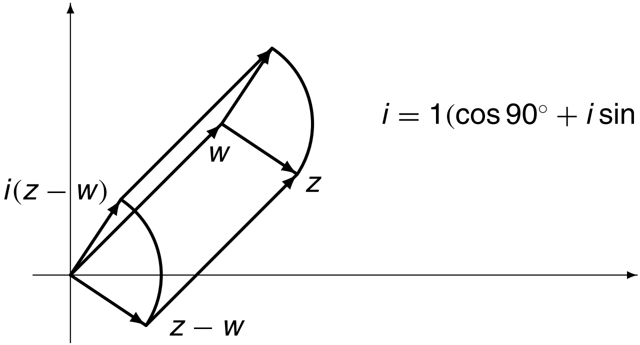


$$i = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

A w-ből z-be mutató $z-w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°), visszatoljuk,

Forgatás pont körül

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?

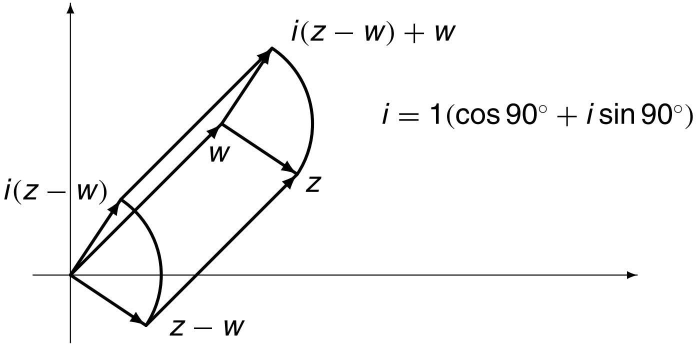


$i = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

A w-ből z-be mutató $z-w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°), visszatoljuk, azaz w-t hozzáadunk.

Forgatás pont körül

Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?



A w-ből z-be mutató $z-w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°), visszatoljuk, azaz w-t hozzáadunk.

Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

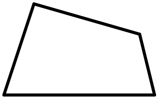
Feladat (Kiss-jegyzet, 1.4.12.)

Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.

Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (Kiss-jegyzet, 1.4.12.)

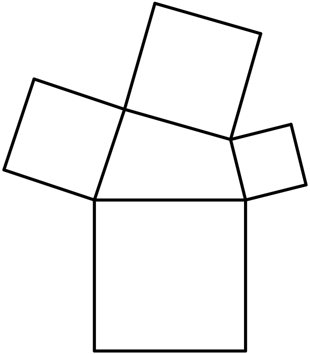
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (Kiss-jegyzet, 1.4.12.)

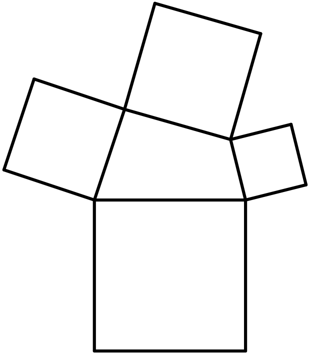
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (Kiss-jegyzet, 1.4.12.)

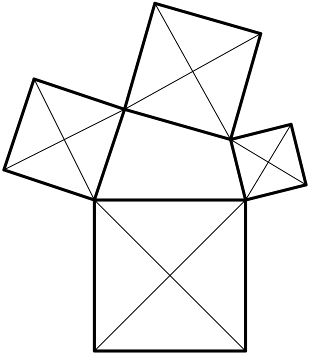
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (Kiss-jegyzet, 1.4.12.)

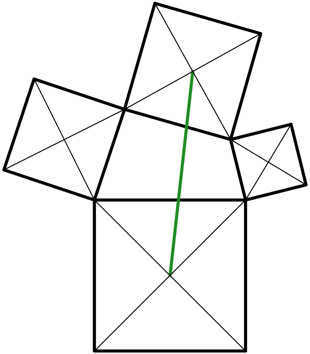
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (Kiss-jegyzet, 1.4.12.)

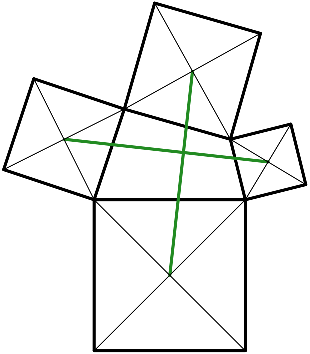
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

Feladat (Kiss-jegyzet, 1.4.12.)

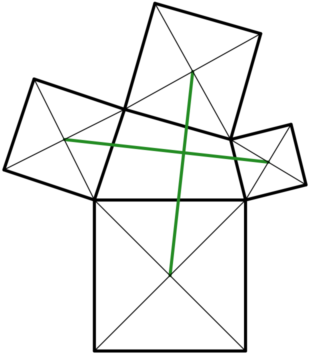
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.



Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal

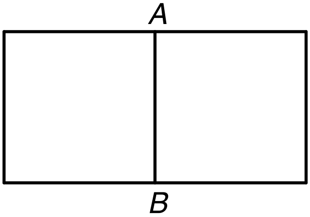
Feladat (Kiss-jegyzet, 1.4.12.)

Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk.
Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait.
Igazoljuk, hogy e két szakasz merőleges, és egyenlő hosszú.



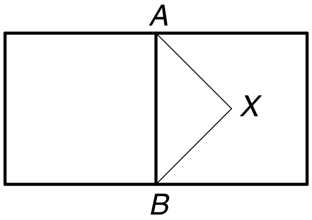
Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



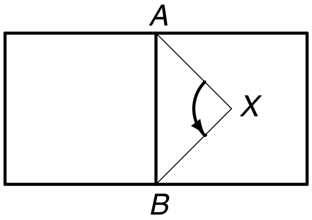
Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



Négyzet középpontja

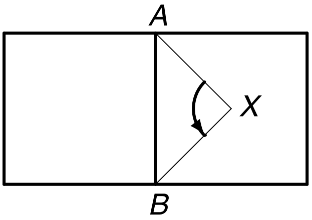
Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

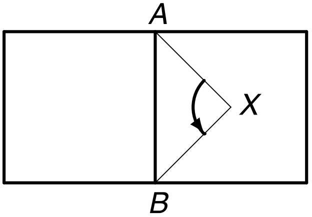


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

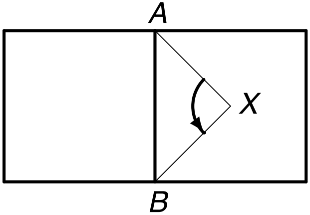


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

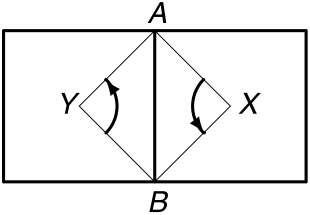


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

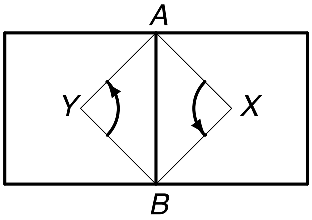


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.
Y körül B-t $+90$ fokkal forgatva A-t kapjuk.

Négyzet középpontja

Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.

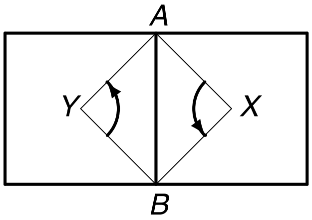


Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.
Y körül B-t $+90$ fokkal forgatva A-t kapjuk.
Így $A = i(B-Y)+Y$.

Négyzet középpontja

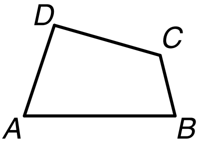
Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



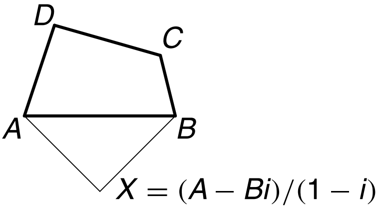
Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.
Y körül B-t $+90$ fokkal forgatva A-t kapjuk.
Így $A = i(B-Y)+Y$. Innen $Y = (A-Bi)/(1-i)$.

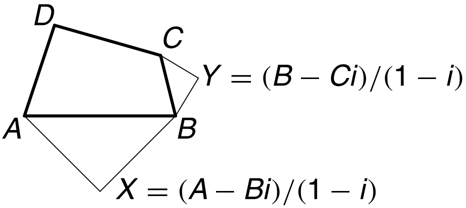
A négyszöges feladat megoldása



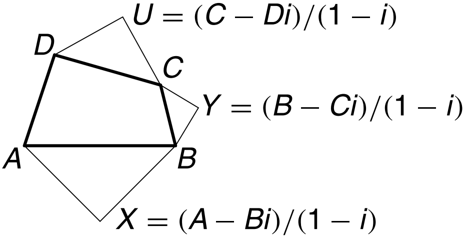
A négyszöges feladat megoldása



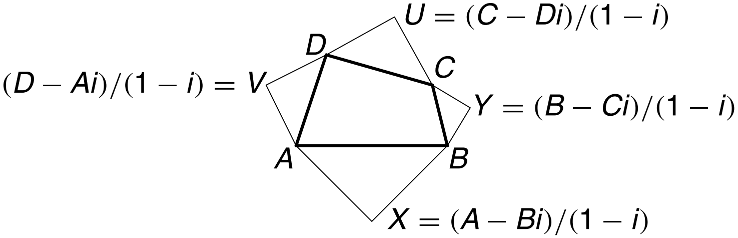
A négyszöges feladat megoldása



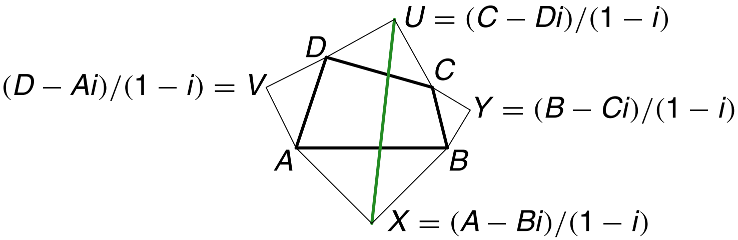
A négyszöges feladat megoldása



A négyszöges feladat megoldása

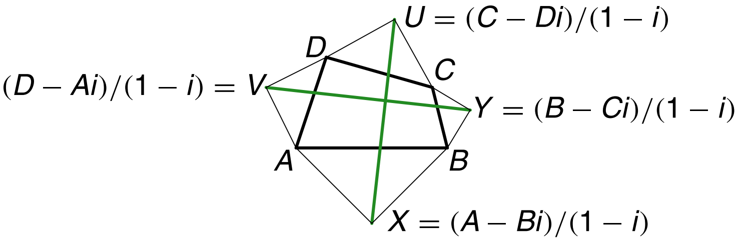


A négyszöges feladat megoldása



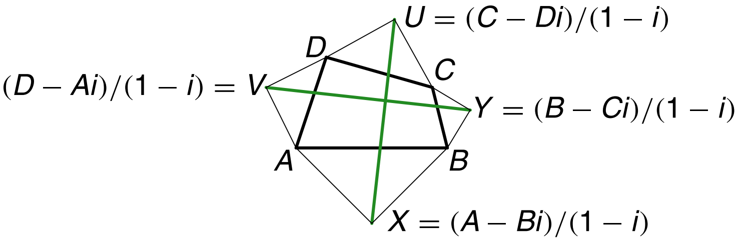
$$\overrightarrow{XU} = U - X = \frac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big).$$

A négyszöges feladat megoldása



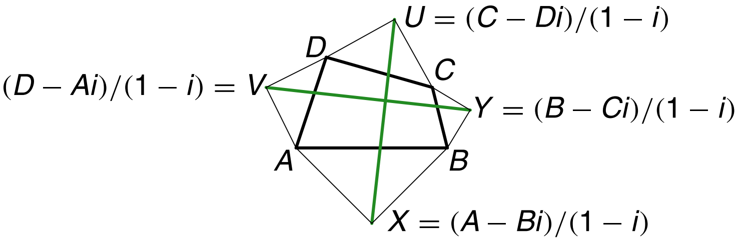
$$\overrightarrow{XU} = U - X = \frac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big).$$
$$\overrightarrow{YV} = V - Y = \frac{1}{1-i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big).$$

A négyszöges feladat megoldása



$\overrightarrow{XU} = U - X = \dfrac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big)$.
$\overrightarrow{YV} = V - Y = \dfrac{1}{1-i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big)$. De
$i\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big) = \Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big)$.

A négyszöges feladat megoldása



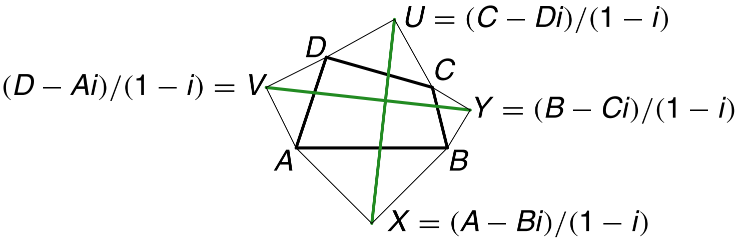
$\overrightarrow{XU} = U - X = \dfrac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big)$.

$\overrightarrow{YV} = V - Y = \dfrac{1}{1-i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big)$. De

$i\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big) = \Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big)$.

Azaz $i(U - X) = V - Y$,

A négyszöges feladat megoldása



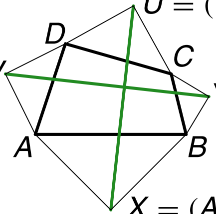
$\overrightarrow{XU} = U - X = \dfrac{1}{1 - i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big)$.

$\overrightarrow{YV} = V - Y = \dfrac{1}{1 - i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big)$. De

$i\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big) = \Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big)$.

Azaz $i(U - X) = V - Y$, így $\overrightarrow{XU}$ $+90^\circ$-os elforgatottja $\overrightarrow{YV}$.

A négyszöges feladat megoldása



$$\overrightarrow{XU} = U - X = \frac{1}{1-i}\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big).$$

$$\overrightarrow{YV} = V - Y = \frac{1}{1-i}\Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big).$$ De

$$i\Big((C - Di) - (A - Bi)\Big) = \Big((D - Ai) - (B - Ci)\Big).$$

Azaz $i(U - X) = V - Y$, így $\overrightarrow{XU}$ $+90^\circ$-os elforgatottja $\overrightarrow{YV}$.

Ezzel elvégeztük a Kiss-jegyzet 1.4. Szakaszát.