Algebra1, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

18. előadás

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható,

A megkívánt tulajdonságok

Tétel

Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3 × 3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$,

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.
A képlet legközelebb, permutációk előjelének felhasználásával.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.
A képlet legközelebb, permutációk előjelének felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az $n = 2$ esetben (HF).

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.
A képlet legközelebb, permutációk előjelének felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az $n = 2$ esetben (HF).
A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.
A képlet legközelebb, permutációk előjelének felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az $n = 2$ esetben (HF).
A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.
A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.

A bizonyítás stratégiája

Emlékeztető 3×3-ra

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definíció

Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege.
A képlet legközelebb, permutációk előjelének felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az $n = 2$ esetben (HF).
A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.
A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.
A (8)-ról ma lesz szó aldeterminánsok felhasználásával.

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk,

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet,

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van,

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.
- Ellenkező esetben felső háromszögmátrixot kapunk,

A determináns kiszámítása

Eljárás

Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az alatta lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.
- Ellenkező esetben felső háromszögmátrixot kapunk, melynek determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} =$$

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} =$$

Az első két oszlopot megcseréltük.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} =$$

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} =$$

A második sorból kivontuk az első sor 4-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} =$$

A harmadik sorból kivontuk az első sor 7-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A harmadik sorból kivontuk a második sor 2-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Az eredmény a főátlóbeli elemek szorzata.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} =$$

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} =$$

Az első két oszlopot megcseréltük.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} =$$

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} =$$

A második sorból kivontuk az első sor 4-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} =$$

A harmadik sorból kivontuk az első sor 7-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

A harmadik sorból kivontuk a második sor 2-szeresét.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

HF: Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

HF: Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.
Az utolsó sor nulla, így a determináns is nulla.

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

HF: Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.
Az utolsó sor nulla, így a determináns is nulla.
Az utolsó sor az első két sornak lineáris kombinációja:

Példa eliminációra

Példa

Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

HF: Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.
Az utolsó sor nulla, így a determináns is nulla.
Az utolsó sor az első két sornak lineáris kombinációja:
a második sor 2-szerese mínusz az első sor.

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek.

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$,

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$,

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$,

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel,

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel, majd adjuk hozzá az *i*-edik oszlop λ_i-szeresét

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel, majd adjuk hozzá az i-edik oszlop λ_i-szeresét minden $i \neq 2$-re.

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel, majd adjuk hozzá az i-edik oszlop λ_i-szeresét minden $i \neq 2$-re. Ekkor a második oszlop nulla lesz,

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel, majd adjuk hozzá az i-edik oszlop λ_i-szeresét minden $i \neq 2$-re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla.

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel, majd adjuk hozzá az i-edik oszlop λ_i-szeresét minden $i \neq 2$-re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns $\lambda_2 \neq 0$-szorosa,

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel, majd adjuk hozzá az i-edik oszlop λ_i-szeresét minden $i \neq 2$-re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns $\lambda_2 \neq 0$-szorosa, így az is nulla.

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel, majd adjuk hozzá az i-edik oszlop λ_i-szeresét minden $i \neq 2$-re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns $\lambda_2 \neq 0$-szorosa, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla,

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel, majd adjuk hozzá az i-edik oszlop λ_i-szeresét minden $i \neq 2$-re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns $\lambda_2 \neq 0$-szorosa, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel, majd adjuk hozzá az i-edik oszlop λ_i-szeresét minden $i \neq 2$-re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns $\lambda_2 \neq 0$-szorosa, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni).

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel, majd adjuk hozzá az i-edik oszlop λ_i-szeresét minden $i \neq 2$-re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns $\lambda_2 \neq 0$-szorosa, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni). Ez a többi sor lineáris kombinációja az eljárás miatt.

A determináns eltűnése

Tétel

Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)

Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel, majd adjuk hozzá az i-edik oszlop λ_i-szeresét minden $i \neq 2$-re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns $\lambda_2 \neq 0$-szorosa, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni). Ez a többi sor lineáris kombinációja az eljárás miatt. Ezért a sorok lineárisan összefüggenek. $\square$

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az i-edik sor j-edik a_{ij} eleméhez tartozó
M_{ij} előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az i-edik sor j-edik a_{ij} eleméhez tartozó
M_{ij} előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az i-edik sor j-edik a_{ij} eleméhez tartozó
M_{ij} előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.
- Ennek az $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixnak kiszámítjuk a determinánsát.

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az i-edik sor j-edik a_{ij} eleméhez tartozó
M_{ij} **előjeles aldeterminánst** a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.
- Ennek az $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixnak kiszámítjuk a determinánsát.
- Az eredményt megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az i-edik sor j-edik a_{ij} eleméhez tartozó
M_{ij} előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.
- Ennek az $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixnak kiszámítjuk a determinánsát.
- Az eredményt megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

A $(-1)^{i+j}$ előjel megjegyzésére szolgál a sakktáblaszabály:

Előjeles aldeterminánsok

Definíció

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az i-edik sor j-edik a_{ij} eleméhez tartozó
M_{ij} előjeles aldeterminánst a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.
- Ennek az $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixnak kiszámítjuk a determinánsát.
- Az eredményt megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

A $(-1)^{i+j}$ előjel megjegyzésére szolgál a sakktáblaszabály:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki,

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal,

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk,

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk,

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény nulla lesz.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény nulla lesz.
$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \ldots + a_{nj}M_{nk} = 0$

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény nulla lesz.
$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \ldots + a_{nj}M_{nk} = 0$ minden $j \neq k$-ra.

A kifejtési tétel

Kifejtési tétel

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk.
Ekkor M determinánsát kapjuk. Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re.
Ugyanez sorokra is érvényes:
$a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy másik oszlophoz tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény nulla lesz.
$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \ldots + a_{nj}M_{nk} = 0$ minden $j \neq k$-ra.
Ugyanez sorokra is érvényes.

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 =$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6+30-27 = -3.$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6+30-27 = -3.$$

Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6+30-27 = -3.$$

Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6+30-27 = -3.$$

Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6+30-27 = -3.$$

Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6+30-27 = -3.$$

Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6+30-27 = -3.$$

Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 =$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6+30-27 = -3.$$

Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9+24-15 = 0.$$

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6+30-27 = -3.$$

Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9+24-15 = 0.$$

Ugyanaz, mint $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ kifejtése a második sor szerint,

Példa kifejtésre

Példa

A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6+30-27 = -3.$$

Példa

Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 = 0.$$

Ugyanaz, mint $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ kifejtése a második sor szerint, így 0.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki,

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal,

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése,

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa,

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

FONTOS!

Gauss-eliminációval SOKKAL gyorsabb a determináns kiszámítása,

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

FONTOS!

Gauss-eliminációval SOKKAL gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

FONTOS!

Gauss-eliminációval SOKKAL gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében $n!$ szorzás.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

FONTOS!

Gauss-eliminációval SOKKAL gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében $n!$ szorzás. Pl. $n = 6$-ra 720.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

FONTOS!

Gauss-eliminációval SOKKAL gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében $n!$ szorzás. Pl. $n = 6$-ra 720.
A Gauss-elimináció maximum $n^3/2$ szorzás.

A kifejtés hatékonysága

A ferde kifejtési tétel bizonyítása

Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

FONTOS!

Gauss-eliminációval SOKKAL gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében $n!$ szorzás. Pl. $n = 6$-ra 720.
A Gauss-elimináció maximum $n^3/2$ szorzás. Ez $n = 6$-ra 108.

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha $\det(M) \neq 0$,

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} =$.

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,

ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot,

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk,

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} =$

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}$

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.

Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja,

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M-mel,

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M-mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}.$

Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M-mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).
Megfordítva: ha M^{-1} létezik, akkor

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M-mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).
Megfordítva: ha M^{-1} létezik, akkor
$\det(M)\det(M^{-1}) =$

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M-mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).
Megfordítva: ha M^{-1} létezik, akkor
$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) =$

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M-mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).
Megfordítva: ha M^{-1} létezik, akkor
$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) =$

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze,
ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M-mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).
Megfordítva: ha M^{-1} létezik, akkor
$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1$

Az inverz mátrix képlete

Tétel

Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az inverz képlete $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$.
Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, transzponáljuk, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M-mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).
Megfordítva: ha M^{-1} létezik, akkor
$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1$, így $\det(M) \neq 0$.

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n \times n}$.

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$,

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$,

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze:

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$,

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt

$$K(MN) = (KM)N$$

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n \times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt

$$KE_n = K(MN) = (KM)N$$

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt
$K = KE_n = K(MN) = (KM)N$

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt
$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_nN$

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt
$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_nN = N$. $\square$

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt
$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_nN = N$. $\square$

Valójában azt igazoltuk, hogy M mindegyik jobbinverze megegyezik M mindegyik balinverzével.

Balinverz és jobbinverz

Tétel

Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$.
Azaz minden jobbinverz balinverz is.

Bizonyítás

Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$.
Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$.
Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$.
Az asszociativitás miatt
$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_nN = N$. $\square$

Valójában azt igazoltuk, hogy M mindegyik jobbinverze megegyezik M mindegyik balinverzével.
Speciálisan a kétoldali inverz egyértelmű.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer,

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen:

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű,

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$. Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.

Bizonyítás

A Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás,

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.

Bizonyítás

A Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.

Bizonyítás

A Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.
Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.

Bizonyítás

A Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.
Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Cramer-szabály

Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M-ből úgy kapunk,

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.

Bizonyítás

A Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.
Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Cramer-szabály

Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M-ből úgy kapunk, hogy a j-edik oszlop helyére a b oszlopvektort tesszük.

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.

Bizonyítás

A Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.
Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Cramer-szabály

Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M-ből úgy kapunk, hogy a j-edik oszlop helyére a b oszlopvektort tesszük.

Ha $\det(M) \neq 0$,

Egyenletrendszer explicit megoldása

Tétel

Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n \times n}$.
Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.

Bizonyítás

A Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes.
Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Cramer-szabály

Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M-ből úgy kapunk, hogy a j-edik oszlop helyére a b oszlopvektort tesszük.
Ha $\det(M) \neq 0$, akkor a megoldás $x_j = \dfrac{\det(M_j)}{\det(M)}$.

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Megoldás

$$x = \frac{}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$$2x - 3y = 1$$
$$5x - 2y = 8$$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$$2x - 3y = 1$$
$$5x - 2y = 8$$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 + 24}{-4 + 15} =$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$$2x - 3y = 1$$
$$5x - 2y = 8$$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} = \frac{22}{11} = 2,$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$$2x - 3y = 1$$
$$5x - 2y = 8$$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} =$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$$2x - 3y = 1$$
$$5x - 2y = 8$$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16-5}{-4+15} =$$

Példa a Cramer-szabályra

Példa

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16-5}{-4+15} = \frac{11}{11} = 1.$$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$,

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) =$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) =$

$M_1 = [b, v_2]$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] =$

$M_1 = [b, v_2]$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] =$

Az első oszlopot összegre bontjuk.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$

Az első oszlopot összegre bontjuk.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$

Az x_1 és x_2 skalárokat kiemeljük az első oszlopból.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] =$

Az x_1 és x_2 skalárokat kiemeljük az első oszlopból.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] =$

$\det[v_2, v_2] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] =$

$\det[v_2, v_2] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$.

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. $\square$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. $\square$

Vandermonde-determináns (Freud-jegyzet, 1.5.2. Tétel)

$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) =$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. □

Vandermonde-determináns (Freud-jegyzet, 1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. $\square$

Vandermonde-determináns (Freud-jegyzet, 1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n}$$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. $\square$

Vandermonde-determináns (Freud-jegyzet, 1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (z_j - z_i).$$

A Cramer-szabály bizonyítása

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre.
Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$.
Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért
$\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. $\square$

Vandermonde-determináns (Freud-jegyzet, 1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (z_j - z_i).$$

Bizonyítás: gyakorlaton.