Algebra1, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

14. előadás

A sík vektorai

Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató $\overrightarrow{OA}$ vektort az (a, b) számpárral adjuk meg.

A sík vektorai

Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató $\overrightarrow{OA}$ vektort az (a, b) számpárral adjuk meg.
Az $\overrightarrow{OA} = (a, b)$ és az $\overrightarrow{OB} = (c, d)$ vektorok összege
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (a + c, b + d)$,

A sík vektorai

Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató $\overrightarrow{OA}$ vektort
az (a, b) számpárral adjuk meg.
Az $\overrightarrow{OA} = (a, b)$ és az $\overrightarrow{OB} = (c, d)$ vektorok összege
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (a + c, b + d)$,
ami a paralelogramma-szabállyal is megkapható.

A sík vektorai

Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató $\overrightarrow{OA}$ vektort az (a, b) számpárral adjuk meg.
Az $\overrightarrow{OA} = (a, b)$ és az $\overrightarrow{OB} = (c, d)$ vektorok összege
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (a + c, b + d)$,
ami a paralelogramma-szabállyal is megkapható.

Legyen λ valós szám (skalár).

A sík vektorai

Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató $\overrightarrow{OA}$ vektort az (a, b) számpárral adjuk meg.
Az $\overrightarrow{OA} = (a, b)$ és az $\overrightarrow{OB} = (c, d)$ vektorok összege
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (a + c, b + d)$,
ami a paralelogramma-szabállyal is megkapható.

Legyen λ valós szám (skalár).
Az $\overrightarrow{OA}$ vektor λ-szorosa az $\overrightarrow{OB}$, ahol a B pontot úgy kapjuk, hogy

A sík vektorai

Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató $\overrightarrow{OA}$ vektort az (a, b) számpárral adjuk meg.
Az $\overrightarrow{OA} = (a, b)$ és az $\overrightarrow{OB} = (c, d)$ vektorok összege
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (a + c, b + d)$,
ami a paralelogramma-szabállyal is megkapható.

Legyen λ valós szám (skalár).
Az $\overrightarrow{OA}$ vektor λ-szorosa az $\overrightarrow{OB}$, ahol a B pontot úgy kapjuk, hogy az A pontot az origóból $|\lambda|$-szorosára nyújtjuk,

A sík vektorai

Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató $\overrightarrow{OA}$ vektort az (a, b) számpárral adjuk meg.
Az $\overrightarrow{OA} = (a, b)$ és az $\overrightarrow{OB} = (c, d)$ vektorok összege
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (a + c, b + d)$,
ami a paralelogramma-szabállyal is megkapható.

Legyen λ valós szám (skalár).
Az $\overrightarrow{OA}$ vektor λ-szorosa az $\overrightarrow{OB}$, ahol a B pontot úgy kapjuk, hogy az A pontot az origóból $|\lambda|$-szorosára nyújtjuk, és ha λ negatív, akkor tükrözzük is az origóra.

A sík vektorai

Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató $\overrightarrow{OA}$ vektort az (a, b) számpárral adjuk meg.
Az $\overrightarrow{OA} = (a, b)$ és az $\overrightarrow{OB} = (c, d)$ vektorok összege
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (a + c, b + d)$,
ami a paralelogramma-szabállyal is megkapható.

Legyen λ valós szám (skalár).
Az $\overrightarrow{OA}$ vektor λ-szorosa az $\overrightarrow{OB}$, ahol a B pontot úgy kapjuk, hogy az A pontot az origóból $|\lambda|$-szorosára nyújtjuk, és ha λ negatív, akkor tükrözzük is az origóra.

Állítás

Ha $\overrightarrow{OA} = (a, b)$, akkor $\lambda\overrightarrow{OA} = (\lambda a, \lambda b)$. □

Általános vektorok

Az (a, b) vektort ezentúl oszlopvektornak írjuk: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Általános vektorok

Az (a, b) vektort ezentúl oszlopvektornak írjuk: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Tehát $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$

Általános vektorok

Az (a, b) vektort ezentúl oszlopvektornak írjuk: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Tehát $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ és $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$.

Általános vektorok

Az (a, b) vektort ezentúl oszlopvektornak írjuk: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Tehát $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ és $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$.

Definíció

Legyen T test.

Általános vektorok

Az (a, b) vektort ezentúl oszlopvektornak írjuk: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Tehát $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ és $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$.

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú „táblázatok”,

Általános vektorok

Az (a, b) vektort ezentúl oszlopvektornak írjuk: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Tehát $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ és $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$.

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú „táblázatok”, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$.

Általános vektorok

Az (a, b) vektort ezentúl oszlopvektornak írjuk: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Tehát $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ és $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$.

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú „táblázatok”, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$.

Az összes ilyen oszlopvektorból álló halmaz jele T^n.

Általános vektorok

Az (a, b) vektort ezentúl oszlopvektornak írjuk: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Tehát $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ és $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$.

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú „táblázatok”, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$.

Az összes ilyen oszlopvektorból álló halmaz jele T^n.

Az n szám a T^n dimenziója.

Általános vektorok

Az (a, b) vektort ezentúl oszlopvektornak írjuk: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Tehát $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ és $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$.

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú oszlopvektorok az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú „táblázatok”, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$.
Az összes ilyen oszlopvektorból álló halmaz jele T^n.
Az n szám a T^n dimenziója. A sík, azaz $\mathbb{R}^2$ kétdimenziós.

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

az összeadást

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

az összeadást

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

az összeadást

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

az összeadást és a λ skalárral szorzást.

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} =$$

az összeadást és a λ skalárral szorzást.

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

az összeadást és a λ skalárral szorzást.

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást.

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást.
Azaz összeadni és skalárral szorozni komponensenként kell.

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást.
Azaz összeadni és skalárral szorozni komponensenként kell.

A nullvektor

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást.
Azaz összeadni és skalárral szorozni komponensenként kell.

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást.
Azaz összeadni és skalárral szorozni komponensenként kell.

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$
(minden komponens T nulleleme)

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást.
Azaz összeadni és skalárral szorozni komponensenként kell.

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett:

(minden komponens T nulleleme)

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást.
Azaz összeadni és skalárral szorozni komponensenként kell.

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} =$

(minden komponens T nulleleme)

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást.
Azaz összeadni és skalárral szorozni komponensenként kell.

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett: $- \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme)

Műveletek vektorokkal

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az összeadást és a λ skalárral szorzást.
Azaz összeadni és skalárral szorozni komponensenként kell.

A nullvektor $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az ellentett: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens T nulleleme) (komponensenkénti ellentett)

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a nullvektor).

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

(9) $0 \cdot u$

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

(9) $0 \cdot u = 0$,

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

(9) $0 \cdot u = \lambda \cdot 0 = 0$,

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

(9) $0 \cdot u = \lambda \cdot 0 = 0$, és ha $\lambda u = 0$,

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

(9) $0 \cdot u = \lambda \cdot 0 = 0$, és ha $\lambda u = 0$, akkor $\lambda = 0$

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

(9) $0 \cdot u = \lambda \cdot 0 = 0$, és ha $\lambda u = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $u = 0$.

A műveleti tulajdonságok

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $u+v = v+u$ (az összeadás kommutatív).

(3) $u+0 = 0+u = u$ (0 a nullvektor).

(4) $u+(-u) = (-u)+u = 0$ ($-u$ az u ellentettje).

(5) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test egységeleme).

(9) $0 \cdot u = \lambda \cdot 0 = 0$, és ha $\lambda u = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $u = 0$.

Kétféle 0!

Lineáris függetlenség

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan függetlenek,

Lineáris függetlenség

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan függetlenek,
ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés

Lineáris függetlenség

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés CSAK ÚGY teljesülhet, ha

Lineáris függetlenség

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.

Lineáris függetlenség

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. (Itt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ tetszőleges skalárok.)

Lineáris függetlenség

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan függetlenek,
ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés
CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.
(Itt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ tetszőleges skalárok.)
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan összefüggők.

Lineáris függetlenség

Definíció

A $v_1, \dots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan függetlenek,
ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés
CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$.
(Itt $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ tetszőleges skalárok.)
Egyébként a $v_1, \dots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan összefüggők.
A $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ neve:

Lineáris függetlenség

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.
(Itt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ tetszőleges skalárok.)
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan összefüggők.
A $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ neve: lineáris kombináció.

Lineáris függetlenség

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan függetlenek,
ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés
CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.
(Itt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ tetszőleges skalárok.)
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan összefüggők.
A $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ neve: lineáris kombináció.

Állítás (HF)

- A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független,

Lineáris függetlenség

Definíció

A $v_1, \dots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan függetlenek,
ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés
CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.
(Itt $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ tetszőleges skalárok.)
Egyébként a $v_1, \dots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan összefüggők.
A $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ neve: lineáris kombináció.

Állítás (HF)

- A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független, ha nem párhuzamosak.

Lineáris függetlenség

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan függetlenek,
ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés
CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.
(Itt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ tetszőleges skalárok.)
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan összefüggők.
A $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ neve: lineáris kombináció.

Állítás (HF)

- A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független, ha nem párhuzamosak.
- A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő,

Lineáris függetlenség

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan függetlenek,
ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés
CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$.
(Itt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ tetszőleges skalárok.)
Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok lineárisan összefüggők.
A $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ neve: lineáris kombináció.

Állítás (HF)

- A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független, ha nem párhuzamosak.
- A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egy síkban vannak.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} +$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} =$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} +$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} =$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} +$$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} +$$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} =$$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

akkor $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

akkor $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$ és $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix}$,
akkor $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$ és $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$. Ezt a homogén lineáris egyenletrendszert megoldva $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$,

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix},$

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ az

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1m}\lambda_m = 0$$
$$a_{21}\lambda_1 + \ldots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \ldots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre.

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre. A $v_1, \dots, v_m$ akkor függetlenek,

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre. A $v_1, \dots, v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van,

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{gathered} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1m}\lambda_m = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \ldots + a_{2m}\lambda_m = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{nm}\lambda_m = 0 \end{gathered}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ismeretlenekre. A $v_1, \ldots, v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha nincs szabad változó.

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{gathered} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1m}\lambda_m = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \ldots + a_{2m}\lambda_m = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{nm}\lambda_m = 0 \end{gathered}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ismeretlenekre. A $v_1, \ldots, v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha nincs szabad változó.

Következmény: Ha több vektor van, mint a dimenzió,

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre. A $v_1, \dots, v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha nincs szabad változó.

Következmény: Ha több vektor van, mint a dimenzió, akkor ezek lineárisan összefüggenek

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre. A $v_1, \dots, v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha nincs szabad változó.

Következmény: Ha több vektor van, mint a dimenzió, akkor ezek lineárisan összefüggenek (van nemtriviális megoldás).

A függetlenség elemi tulajdonságai

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk.

A függetlenség elemi tulajdonságai

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

A függetlenség elemi tulajdonságai

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A v vektorból álló egyelemű rendszer akkor és csak akkor független,

A függetlenség elemi tulajdonságai

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A v vektorból álló egyelemű rendszer akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.

A függetlenség elemi tulajdonságai

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A v vektorból álló egyelemű rendszer akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) Ha egy vektorrendszerben benne van a nullvektor,

A függetlenség elemi tulajdonságai

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A v vektorból álló egyelemű rendszer akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) Ha egy vektorrendszerben benne van a nullvektor, akkor az összefüggő.

A függetlenség elemi tulajdonságai

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A v vektorból álló egyelemű rendszer akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) Ha egy vektorrendszerben benne van a nullvektor, akkor az összefüggő.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő,

A függetlenség elemi tulajdonságai

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A v vektorból álló egyelemű rendszer akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) Ha egy vektorrendszerben benne van a nullvektor, akkor az összefüggő.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

A függetlenség elemi tulajdonságai

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A v vektorból álló egyelemű rendszer akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) Ha egy vektorrendszerben benne van a nullvektor, akkor az összefüggő.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa,

A függetlenség elemi tulajdonságai

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A v vektorból álló egyelemű rendszer akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) Ha egy vektorrendszerben benne van a nullvektor, akkor az összefüggő.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő.

A függetlenség elemi tulajdonságai

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A v vektorból álló egyelemű rendszer akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.

(3) Ha egy vektorrendszerben benne van a nullvektor, akkor az összefüggő.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \dots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer **rangja** r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r + 1$ darab lineárisan független.

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r + 1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám,

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \dots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r+1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani.

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r + 1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani.

Jelölés: $r(v_1, \ldots, v_m) = r$.

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \dots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r+1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani.

Jelölés: $r(v_1, \dots, v_m) = r$.

Példa

Az $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \dots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r+1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani.

Jelölés: $r(v_1, \dots, v_m) = r$.

Példa

Az $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$,

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r+1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani.

Jelölés: $r(v_1, \ldots, v_m) = r$.

Példa

Az $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer **rangja** r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r+1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani.

Jelölés: $r(v_1, \ldots, v_m) = r$.

Példa

Az $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \dots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r+1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani.
Jelölés: $r(v_1, \dots, v_m) = r$.

Példa

Az $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r+1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani.

Jelölés: $r(v_1, \ldots, v_m) = r$.

Példa

Az $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1,

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r+1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani.

Jelölés: $r(v_1, \ldots, v_m) = r$.

Példa

Az $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1,

mert v_1 önmagában független,

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r+1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani.
Jelölés: $r(v_1, \ldots, v_m) = r$.

Példa

Az $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1,
mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg,

A rang fogalma

Definíció

A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer rangja r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r+1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani.
Jelölés: $r(v_1, \ldots, v_m) = r$.

Példa

Az $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1,

mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa.

A rang tulajdonságai

Tétel

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ lineárisan független vektorrendszer,

A rang tulajdonságai

Tétel

Ha adott a $v_1, \dots, v_m \in T^n$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

A rang tulajdonságai

Tétel

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

A rang tulajdonságai

Tétel

Ha adott a $v_1, \dots, v_m \in T^n$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik vektor tetszőleges skalárszorosát.

A rang tulajdonságai

Tétel

Ha adott a $v_1, \dots, v_m \in T^n$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik vektor tetszőleges skalárszorosát.

Ha $v_1, \dots, v_m \in T^n$ tetszőleges vektorrendszer,

A rang tulajdonságai

Tétel

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik vektor tetszőleges skalárszorosát.

Ha $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ tetszőleges vektorrendszer, akkor az (1) és (2) lépéseknél a rangja nem változik.

A rang tulajdonságai

Tétel

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik vektor tetszőleges skalárszorosát.

Ha $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ tetszőleges vektorrendszer, akkor az (1) és (2) lépéseknél a rangja nem változik.

Bizonyítás

A függetlenségre vonatkozó állítás könnyű Házi Feladat.

A rang tulajdonságai

Tétel

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik vektor tetszőleges skalárszorosát.

Ha $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ tetszőleges vektorrendszer, akkor az (1) és (2) lépéseknél a rangja nem változik.

Bizonyítás

A függetlenségre vonatkozó állítás könnyű Házi Feladat.
A rangra vonatkozó állítást a következő félévben igazoljuk,

A rang tulajdonságai

Tétel

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik vektor tetszőleges skalárszorosát.

Ha $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ tetszőleges vektorrendszer, akkor az (1) és (2) lépéseknél a rangja nem változik.

Bizonyítás

A függetlenségre vonatkozó állítás könnyű Házi Feladat.
A rangra vonatkozó állítást a következő félévben igazoljuk, a generált altér fogalmának felhasználásával.

Maximális független rendszerek

Definíció

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer,

Maximális független rendszerek

Definíció

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer, akkor ennek egy részrendszerét maximális független rendszernek nevezzük,

Maximális független rendszerek

Definíció

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer, akkor ennek egy részrendszerét **maximális független rendszernek** nevezzük, ha lineárisan független,

Maximális független rendszerek

Definíció

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer, akkor ennek egy részrendszerét **maximális független rendszernek** nevezzük, ha lineárisan független, de a kimaradó vektorok **bármelyikét** hozzávéve már lineárisan összefüggő lesz.

Maximális független rendszerek

Definíció

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer, akkor ennek egy részrendszerét maximális független rendszernek nevezzük, ha lineárisan független, de a kimaradó vektorok bármelyikét hozzávéve már lineárisan összefüggő lesz.

Tétel

Minden maximális független részrendszer elemszáma egyenlő a vektorrendszer r rangjával.

Maximális független rendszerek

Definíció

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer, akkor ennek egy részrendszerét maximális független rendszernek nevezzük, ha lineárisan független, de a kimaradó vektorok bármelyikét hozzávéve már lineárisan összefüggő lesz.

Tétel

Minden maximális független részrendszer elemszáma egyenlő a vektorrendszer r rangjával. Ezért minden r-nél kevesebb elemű független részrendszer kiegészíthető egy r elemű független rendszerré.

Maximális független rendszerek

Definíció

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer, akkor ennek egy részrendszerét maximális független rendszernek nevezzük, ha lineárisan független, de a kimaradó vektorok bármelyikét hozzávéve már lineárisan összefüggő lesz.

Tétel

Minden maximális független részrendszer elemszáma egyenlő a vektorrendszer r rangjával. Ezért minden r-nél kevesebb elemű független részrendszer kiegészíthető egy r elemű független rendszerré.

Bizonyítás: a következő félévben,

Maximális független rendszerek

Definíció

Ha adott a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorrendszer, akkor ennek egy részrendszerét maximális független rendszernek nevezzük, ha lineárisan független, de a kimaradó vektorok bármelyikét hozzávéve már lineárisan összefüggő lesz.

Tétel

Minden maximális független részrendszer elemszáma egyenlő a vektorrendszer r rangjával. Ezért minden r-nél kevesebb elemű független részrendszer kiegészíthető egy r elemű független rendszerré.

Bizonyítás: a következő félévben, a lineáris függés és a generált altér fogalmának felhasználásával.

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$,

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix},$

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Végezzük el a Gauss-eliminációt a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer esetében.

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Végezzük el a Gauss-eliminációt a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer esetében.

Ekkor a $v_1, \dots, v_m$ rendszer rangja

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Végezzük el a Gauss-eliminációt a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer esetében.

Ekkor a $v_1, \dots, v_m$ rendszer rangja a vezéregyesek száma.

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Végezzük el a Gauss-eliminációt a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer esetében.

Ekkor a $v_1, \dots, v_m$ rendszer rangja a vezéregyesek száma.

A bizonyítás ötlete: lásd később.

Mátrix rangja

Definíció

Egy $n \times m$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat,

Mátrix rangja

Definíció

Egy $n \times m$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melynek elemei egy T test elemei.

Mátrix rangja

Definíció

Egy $n \times m$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melynek elemei egy T test elemei. Ezek halmazát $T^{n \times m}$ jelöli.

Mátrix rangja

Definíció

Egy $n \times m$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melynek elemei egy T test elemei. Ezek halmazát $T^{n \times m}$ jelöli. Speciálisan T^n elemei $n \times 1$-es mátrixoknak tekinthetők.

Mátrix rangja

Definíció

Egy $n \times m$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melynek elemei egy T test elemei. Ezek halmazát $T^{n \times m}$ jelöli. Speciálisan T^n elemei $n \times 1$-es mátrixoknak tekinthetők. A sorvektorok az $1 \times m$-es mátrixok.

Mátrix rangja

Definíció

Egy $n \times m$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melynek elemei egy T test elemei. Ezek halmazát $T^{n \times m}$ jelöli. Speciálisan T^n elemei $n \times 1$-es mátrixoknak tekinthetők. A sorvektorok az $1 \times m$-es mátrixok.

Definíció

Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.

Mátrix rangja

Definíció

Egy $n \times m$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melynek elemei egy T test elemei. Ezek halmazát $T^{n\times m}$ jelöli. Speciálisan T^n elemei $n \times 1$-es mátrixoknak tekinthetők.
A sorvektorok az $1 \times m$-es mátrixok.

Definíció

Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

Mátrix rangja

Definíció

Egy $n \times m$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melynek elemei egy T test elemei. Ezek halmazát $T^{n \times m}$ jelöli. Speciálisan T^n elemei $n \times 1$-es mátrixoknak tekinthetők. A sorvektorok az $1 \times m$-es mátrixok.

Definíció

Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

Tétel

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.

Mátrix rangja

Definíció

Egy $n \times m$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melynek elemei egy T test elemei. Ezek halmazát $T^{n \times m}$ jelöli. Speciálisan T^n elemei $n \times 1$-es mátrixoknak tekinthetők. A sorvektorok az $1 \times m$-es mátrixok.

Definíció

Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

Tétel

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a mátrix rangja,

Mátrix rangja

Definíció

Egy $n \times m$-es mátrix egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melynek elemei egy T test elemei. Ezek halmazát $T^{n \times m}$ jelöli. Speciálisan T^n elemei $n \times 1$-es mátrixoknak tekinthetők. A sorvektorok az $1 \times m$-es mátrixok.

Definíció

Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

Tétel

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja. Ez a mátrix rangja, jele $r(M)$.

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

(2) Korábban láttuk, hogy ennek lépései egy vektorrendszer rangját nem változtatják meg.

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

(2) Korábban láttuk, hogy ennek lépései egy vektorrendszer rangját nem változtatják meg. Így a sorrang nem változik.

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

(2) Korábban láttuk, hogy ennek lépései egy vektorrendszer rangját nem változtatják meg. Így a sorrang nem változik.

(3) Könnyű látni, hogy az oszloprang sem változik közben.

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

(2) Korábban láttuk, hogy ennek lépései egy vektorrendszer rangját nem változtatják meg. Így a sorrang nem változik.

(3) Könnyű látni, hogy az oszloprang sem változik közben.

(4) Az eliminált alakban azok a vektorok alkotnak maximális független rendszert,

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

(2) Korábban láttuk, hogy ennek lépései egy vektorrendszer rangját nem változtatják meg. Így a sorrang nem változik.

(3) Könnyű látni, hogy az oszloprang sem változik közben.

(4) Az eliminált alakban azok a vektorok alkotnak maximális független rendszert, amelyekben van vezéregyes,

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

(2) Korábban láttuk, hogy ennek lépései egy vektorrendszer rangját nem változtatják meg. Így a sorrang nem változik.

(3) Könnyű látni, hogy az oszloprang sem változik közben.

(4) Az eliminált alakban azok a vektorok alkotnak maximális független rendszert, amelyekben van vezéregyes, mind a sorok,

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

(2) Korábban láttuk, hogy ennek lépései egy vektorrendszer rangját nem változtatják meg. Így a sorrang nem változik.

(3) Könnyű látni, hogy az oszloprang sem változik közben.

(4) Az eliminált alakban azok a vektorok alkotnak maximális független rendszert, amelyekben van vezéregyes, mind a sorok, mind az oszlopok között.

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

(2) Korábban láttuk, hogy ennek lépései egy vektorrendszer rangját nem változtatják meg. Így a sorrang nem változik.

(3) Könnyű látni, hogy az oszloprang sem változik közben.

(4) Az eliminált alakban azok a vektorok alkotnak maximális független rendszert, amelyekben van vezéregyes, mind a sorok, mind az oszlopok között.

Következmény

A mátrix rangjának kiszámításakor

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

(2) Korábban láttuk, hogy ennek lépései egy vektorrendszer rangját nem változtatják meg. Így a sorrang nem változik.

(3) Könnyű látni, hogy az oszloprang sem változik közben.

(4) Az eliminált alakban azok a vektorok alkotnak maximális független rendszert, amelyekben van vezéregyes, mind a sorok, mind az oszlopok között.

Következmény

A mátrix rangjának kiszámításakor mind a sorokkal,

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

(2) Korábban láttuk, hogy ennek lépései egy vektorrendszer rangját nem változtatják meg. Így a sorrang nem változik.

(3) Könnyű látni, hogy az oszloprang sem változik közben.

(4) Az eliminált alakban azok a vektorok alkotnak maximális független rendszert, amelyekben van vezéregyes, mind a sorok, mind az oszlopok között.

Következmény

A mátrix rangjának kiszámításakor mind a sorokkal, mind az oszlopokkal

A sor- és oszloprang egyenlősége

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

(2) Korábban láttuk, hogy ennek lépései egy vektorrendszer rangját nem változtatják meg. Így a sorrang nem változik.

(3) Könnyű látni, hogy az oszloprang sem változik közben.

(4) Az eliminált alakban azok a vektorok alkotnak maximális független rendszert, amelyekben van vezéregyes, mind a sorok, mind az oszlopok között.

Következmény

A mátrix rangjának kiszámításakor mind a sorokkal, mind az oszlopokkal szabad Gauss-eliminációs lépéseket tenni.