Algebra1, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

13. előadás

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$$2x - 3y = 1$$
$$5x - 2y = 8$$

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$$2x - 3y = 1$$
$$5x - 2y = 8$$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$$2x - 3y = 1$$
$$5x - 2y = 8$$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$,

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$.

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$. Innen $y = 1$.

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$. Innen $y = 1$.
Az első egyenletből ekkor $2x - 3 = 1$,

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$. Innen $y = 1$.
Az első egyenletből ekkor $2x - 3 = 1$, azaz $x = 2$.

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$. Innen $y = 1$.
Az első egyenletből ekkor $2x - 3 = 1$, azaz $x = 2$.

Ellenőrzés:

$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$

Egy ismeretlen kiejtése

Oldjuk meg:

$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Ötlet:

Próbáljuk meg x-et kiejteni (eliminálni).
Az első egyenlet 5-szöröséből vonjuk ki
a második egyenlet 2-szeresét. Az eredmény:
$-15y - (-4y) = 5 - 16$, azaz $-11y = -11$. Innen $y = 1$.
Az első egyenletből ekkor $2x - 3 = 1$, azaz $x = 2$.

Ellenőrzés:

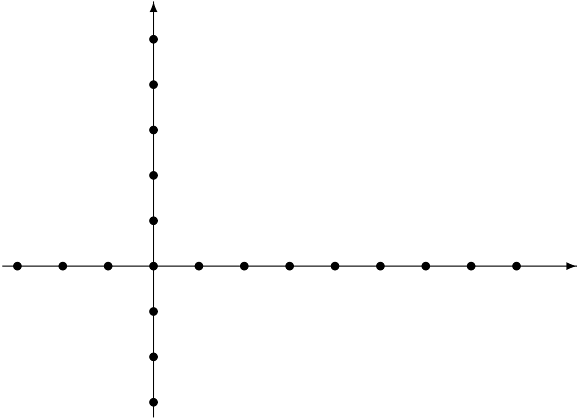
$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$
$5 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 8$

Geometriai ábrázolás

$$2x - 3y = 1,$$
$$5x - 2y = 8,$$

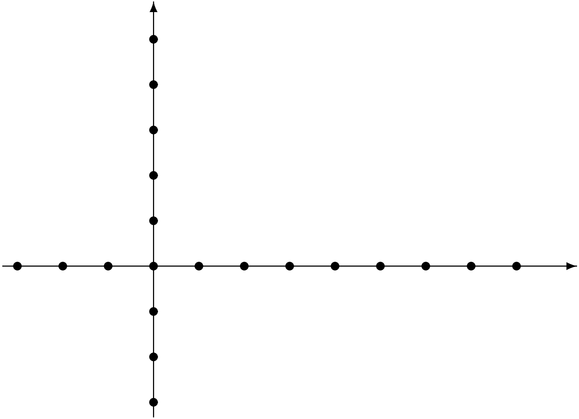
Geometriai ábrázolás

$$2x - 3y = 1,$$
$$5x - 2y = 8,$$



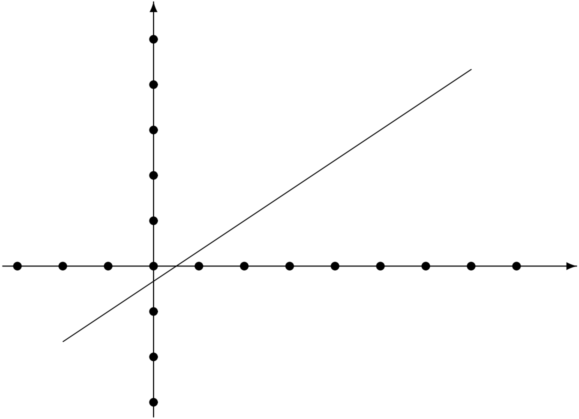
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$,



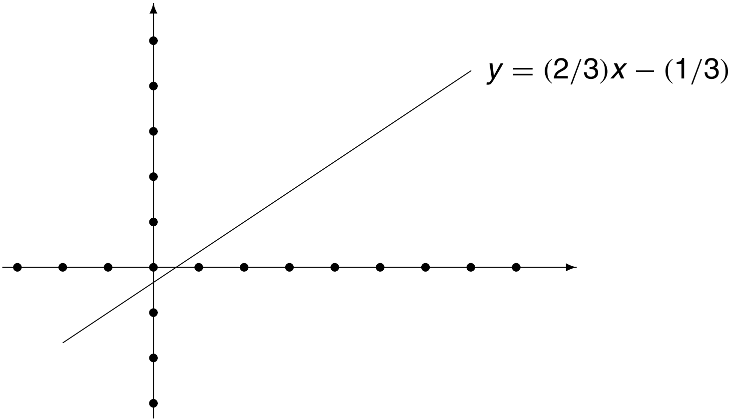
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$,



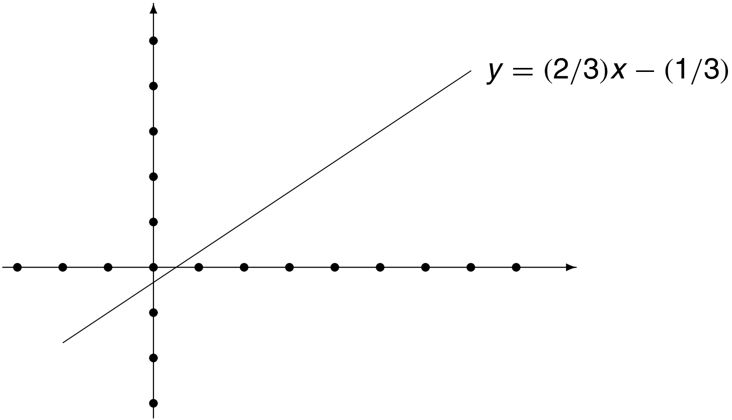
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$,



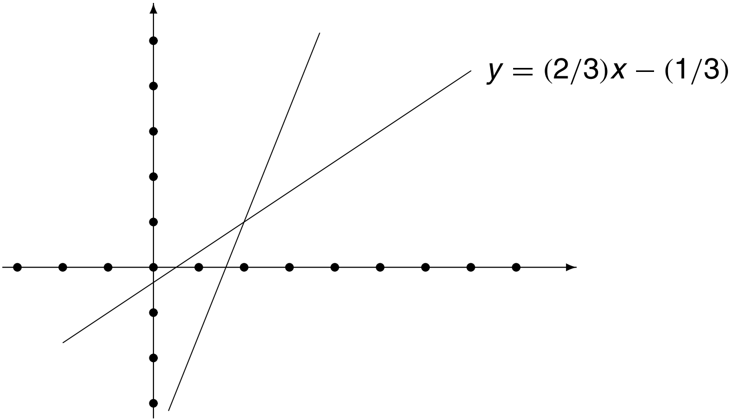
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$, azaz $y = (5/2)x - 4$.



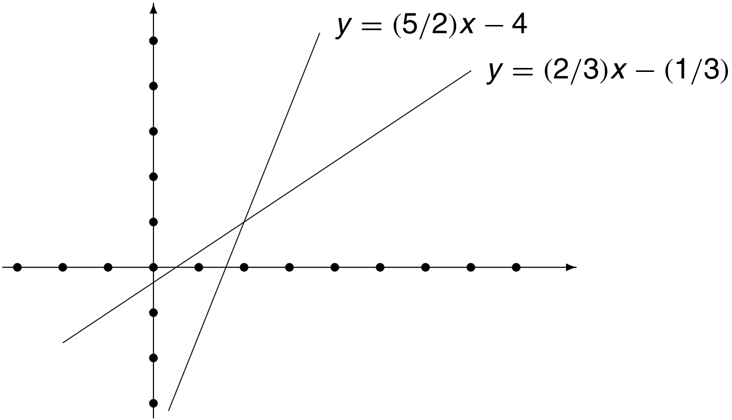
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$, azaz $y = (5/2)x - 4$.



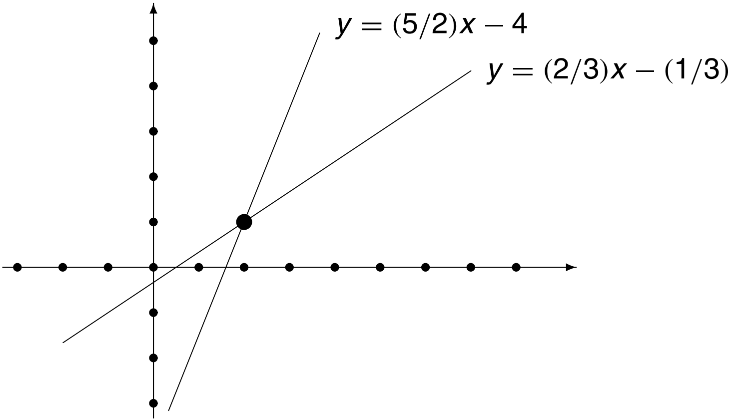
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$, azaz $y = (5/2)x - 4$.



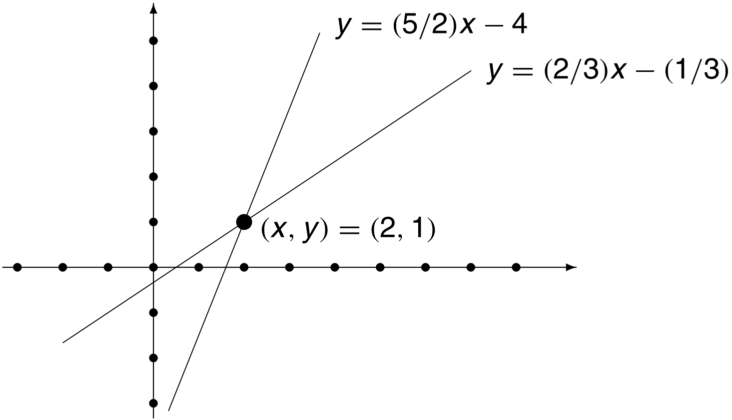
Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$, azaz $y = (5/2)x - 4$.



Geometriai ábrázolás

$2x - 3y = 1$, azaz $y = (2/3)x - (1/3)$.
$5x - 2y = 8$, azaz $y = (5/2)x - 4$.



A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$$3x - 3y = 3$$
$$2x - 2y = 4$$

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$
Párhuzamos egyenesek

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$
Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$,

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$
Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$),

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$
Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$), nincs megoldás.

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$
Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$), nincs megoldás.

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$
Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$), nincs megoldás.

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Egybeeső egyenesek

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$
Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$), nincs megoldás.

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Egybeeső egyenesek ($y = x - 1$),

A megoldások száma

Két egyenesnek lehet

(1) Nulla darab közös pontja (ha párhuzamosak);

(2) Egy darab közös pontja (ha metszők);

(3) Végtelen sok közös pontja (ha egyenlők).

Példák

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 4$
Párhuzamos egyenesek ($y = x - 1$, $y = x - 2$), nincs megoldás.

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Egybeeső egyenesek ($y = x - 1$), végtelen sok megoldás.

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer általános megoldása

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer **általános megoldása**
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer általános megoldása
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer **általános megoldása** az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása, amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás,

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer általános megoldása
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás, ha $y = x - 1$.

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer általános megoldása
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás, ha $y = x - 1$. Ezért
az általános megoldás:

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer **általános megoldása**
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás, ha $y = x - 1$. Ezért
az általános megoldás: $\{(r, r - 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer **általános megoldása**
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás, ha $y = x - 1$. Ezért
az általános megoldás: $\{(r, r-1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Probléma

Hogyan lehet megkeresni egy általános egyenletrendszer
általános megoldását?

Az általános megoldás

Az egyenletrendszer **általános megoldása**
az összes olyan (x, y) számpár valamilyen megadása,
amik megoldásai az egyenletrendszernek.

Példa

$3x - 3y = 3$
$2x - 2y = 2$
Az (x, y) akkor megoldás, ha $y = x - 1$. Ezért
az általános megoldás: $\{(r, r - 1) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

Probléma

Hogyan lehet megkeresni egy általános egyenletrendszer
általános megoldását?

Lineáris egyenletrendszer esetén Gauss-eliminációval.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel,

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m, b$ számok.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m$, b számok.
Általánosabban: $a_1, \ldots, a_m$, b tetszőleges test elemei lehetnek.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m, b$ számok.
Általánosabban: $a_1, \ldots, a_m, b$ tetszőleges test elemei lehetnek.

Definíció

Lineáris egyenletrendszer:

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m$, b számok.
Általánosabban: $a_1, \ldots, a_m$, b tetszőleges test elemei lehetnek.

Definíció

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m, b$ számok. Általánosabban: $a_1, \ldots, a_m, b$ tetszőleges test elemei lehetnek.

Definíció

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m$, b számok.
Általánosabban: $a_1, \ldots, a_m$, b tetszőleges test elemei lehetnek.

Definíció

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1$$

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m$, b számok.
Általánosabban: $a_1, \ldots, a_m$, b tetszőleges test elemei lehetnek.

Definíció

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2$$

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m$, b számok.
Általánosabban: $a_1, \ldots, a_m$, b tetszőleges test elemei lehetnek.

Definíció

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\
a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\
\ldots \\
a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n
\end{gathered}$$

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m$, b számok.
Általánosabban: $a_1, \ldots, a_m$, b tetszőleges test elemei lehetnek.

Definíció

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

Itt n egyenlet van

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Legyenek az ismeretlenek $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Lineáris egyenlet:

$$a_1x_1 + \ldots + a_mx_m = b$$

Ismeretlenek szorzata nem szerepel, $a_1, \ldots, a_m$, b számok.
Általánosabban: $a_1, \ldots, a_m$, b tetszőleges test elemei lehetnek.

Definíció

Lineáris egyenletrendszer: több lineáris egyenlet közös megoldásait keressük. Általános jelölés:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{gathered}$$

Itt n egyenlet van és m ismeretlen.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk,

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.

$$2x + 4y = 6$$

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.

$$2x + 4y = 6 \qquad x + 2y = 3$$

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót,

$$2x + 4y = 6 \qquad x + 2y = 3$$

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót, amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$2x + 4y = 6 \qquad x + 2y = 3$$

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót, amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 6 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad\qquad x + 2y = 3$$

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót, amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4y = 6 & \qquad & x + 2y = 3 \\ 3x + 2y = 5 & \qquad & 3x + 2y = 5 \end{array}$$

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót, amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$\begin{aligned} 2x+4y&=6 \\ 3x+2y&=5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2y&=3 \\ 3x+2y&=5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2y&=\quad 3 \\ & \end{aligned}$$

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót, amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 6 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= \quad 3 \\ & \end{aligned}$$

Az első háromszorosát kivonjuk a másodikból.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót, amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$\begin{array}{rcl} 2x+4y&=&6\\ 3x+2y&=&5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x+2y&=&3\\ 3x+2y&=&5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} x+2y&=&3\\ 0x-4y&=&-4 \end{array}$$

Az első háromszorosát kivonjuk a másodikból.

Az elimináció megengedett lépései

Skalár: a T test egy eleme (tipikusan egy szám).

(1) Az egyik egyenletet egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet tetszőleges skalárszorosát.

Ekkor a megoldások ugyanazok maradnak.

Az (1) lépéssel bármelyik nem nulla együtthatóból 1-et csinálhatunk, ha annak reciprokával szorzunk.
A (2) lépéssel ki lehet nullázni minden olyan együtthatót, amely fölött vagy alatt egy nem nulla együttható található.

$$\begin{aligned} 2x+4y&=6 \\ 3x+2y&=5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2y&=3 \\ 3x+2y&=5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2y&=3 \\ 0x-4y&=-4 \end{aligned}$$

Az első háromszorosát kivonjuk a másodikból. Így $y=1$.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az $(1) + (2)$-t ismételjük,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az $(1) + (2)$-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az $(1) + (2)$-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az $(1) + (2)$-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az $(1) + (2)$-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az $(1)+(2)$-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az $(1) + (2)$-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása.

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az $(1) + (2)$-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása.

(6) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az $(1) + (2)$-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása.

(6) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, és a jobb oldali b_j is nulla,

Szisztematikus eljárás

(1) Egy nem nulla együtthatót leosztással 1-re változtatunk, és bekarikázzuk. Ez a vezéregyes.

(2) Az oszlopában a többi együtthatót kinullázzuk.

(3) Az $(1) + (2)$-t ismételjük, de (1)-ben csak olyan együtthatót választhatunk, amely sorában és oszlopában nincs karika.

(4) Ha ilyen nincs, akkor megállunk. Ezután:

(5) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, de a jobb oldali b_j nem, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása.

(6) Ha van olyan sor, amelynek bal oldalán minden együttható nulla, és a jobb oldali b_j is nulla, akkor ezt a sort kihúzzuk.

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika,

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel,

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, 1 együtthatóval.

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, 1 együtthatóval. Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, 1 együtthatóval. Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges T-beli értéket adva egyértelmű megoldást kapunk.

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, 1 együtthatóval. Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges T-beli értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így a megoldások száma $|T|^k$,

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, 1 együtthatóval. Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges T-beli értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így a megoldások száma $|T|^k$, ahol k a szabad változók száma

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, 1 együtthatóval. Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges T-beli értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így a megoldások száma $|T|^k$, ahol k a szabad változók száma (és $|T|$ a T elemszáma).

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, 1 együtthatóval. Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges T-beli értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így a megoldások száma $|T|^k$, ahol k a szabad változók száma (és $|T|$ a T elemszáma).

A megoldás akkor egyértelmű,

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, 1 együtthatóval. Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges T-beli értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így a megoldások száma $|T|^k$, ahol k a szabad változók száma (és $|T|$ a T elemszáma).

A megoldás akkor egyértelmű, ha az egyenletrendszer nem ellentmondásos,

A megoldás leolvasása

(7) Azokat az ismeretleneket, amelyek oszlopában nincs karika, szabad változónak nevezzük.
A többi ismeretlen a kötött változó.

(8) Mindegyik kötött változó csak egyetlen egyenletben szerepel, 1 együtthatóval. Ezért a kötött változók kifejezhetők a szabad változókkal.

A megoldások száma

A szabad változóknak tetszőleges T-beli értéket adva egyértelmű megoldást kapunk. Így a megoldások száma $|T|^k$, ahol k a szabad változók száma (és $|T|$ a T elemszáma).

A megoldás akkor egyértelmű, ha az egyenletrendszer nem ellentmondásos, és nincs szabad változó.

Az egyetlen összefüggés

Tétel

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Az egyetlen összefüggés

Tétel

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó.

Az egyetlen összefüggés

Tétel

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó. Ezért minden oszlopban van karika.

Az egyetlen összefüggés

Tétel

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó. Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak,

Az egyetlen összefüggés

Tétel

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó. Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop.

Az egyetlen összefüggés

Tétel

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó. Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop. Azaz legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen.

Az egyetlen összefüggés

Tétel

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó. Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop. Azaz legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen.

Fontos: más összefüggés nincs az ismeretlenek száma, az egyenletek száma és a megoldások száma között!

Az egyetlen összefüggés

Tétel

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó. Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop. Azaz legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen.

Fontos: más összefüggés nincs az ismeretlenek száma, az egyenletek száma és a megoldások száma között!
Példák: gyakorlaton,

Az egyetlen összefüggés

Tétel

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó. Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop. Azaz legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen.

Fontos: más összefüggés nincs az ismeretlenek száma, az egyenletek száma és a megoldások száma között!

Példák: gyakorlaton, mátrixos jelöléssel.

Az egyetlen összefüggés

Tétel

Ha az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás.

Bizonyítás

Ha egyértelmű a megoldás, akkor nincs szabad változó. Ezért minden oszlopban van karika. De a karikák csupa különböző sorokban vannak, így legalább annyi sor van, mint oszlop. Azaz legalább annyi egyenlet van, mint ismeretlen.

Fontos: más összefüggés nincs az ismeretlenek száma, az egyenletek száma és a megoldások száma között!
Példák: gyakorlaton, mátrixos jelöléssel.
Irodalom: Freud Róbert: Lineáris algebra, 3.1. szakasz.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén,

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben
az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma,

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor van nemtriviális megoldás.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor van nemtriviális megoldás.

Bizonyítás

Az előző tétel miatt nem lehet egyértelmű a megoldás.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben
az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma,
akkor van nemtriviális megoldás.

Bizonyítás

Az előző tétel miatt nem lehet egyértelmű a megoldás.
De nem is ellentmondásos,

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor van nemtriviális megoldás.

Bizonyítás

Az előző tétel miatt nem lehet egyértelmű a megoldás.
De nem is ellentmondásos, mert van (triviális) megoldás.

Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha a jobb oldalán szereplő mindegyik b_j nullával egyenlő.
Triviális megoldás: mindegyik ismeretlen nulla.

Következmény

Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az egyenletek száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor van nemtriviális megoldás.

Bizonyítás

Az előző tétel miatt nem lehet egyértelmű a megoldás.
De nem is ellentmondásos, mert van (triviális) megoldás.
Ezért van legalább még egy megoldás.