

Algebra1, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

10. előadás

A körosztási polinom

Definíció

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az **n -edik körosztási polinom**.
Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

A körosztási polinom

Definíció

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az **n -edik körosztási polinom**.
Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök,

A körosztási polinom

Definíció

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az **n -edik körosztási polinom**.
Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök,
vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

A körosztási polinom

Definíció

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az **n -edik körosztási polinom**.
Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök,
vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1.$$

A körosztási polinom

Definíció

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az **n -edik körosztási polinom**.
Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök,
vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

A körosztási polinom

Definíció

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az **n -edik körosztási polinom**.
Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök,
vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

$$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i))$$

A körosztási polinom

Definíció

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az **n -edik körosztási polinom**.
Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök,
vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

$$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$$

A körosztási polinom

Definíció

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az **n -edik körosztási polinom**. Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

$$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$$

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) =$$

A körosztási polinom

Definíció

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az **n -edik körosztási polinom**.
Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök,
vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

$$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$$

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = x^2 + x + 1.$$

A körosztási polinom

Definíció

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az **n -edik körosztási polinom**. Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök, vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

$$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$$

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = x^2 + x + 1.$$

$$\Phi_6(x) = \left(x - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(x - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) =$$

A körosztási polinom

Definíció

Ha $n \geq 1$ egész, akkor Φ_n az **n -edik körosztási polinom**.
Ennek egyszeres gyökei a primitív n -edik egységgyökök:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_{\varphi(n)}),$$

ahol $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ az összes primitív n -edik egységgyök,
vagyis az összes olyan komplex szám, melynek rendje n .

$$\Phi_1(x) = x - 1. \quad \Phi_2(x) = x - (-1) = x + 1.$$

$$\Phi_4(x) = (x - i)(x - (-i)) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1.$$

$$\Phi_3(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = x^2 + x + 1.$$

$$\Phi_6(x) = \left(x - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \left(x - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = x^2 - x + 1.$$

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.9.5. Lemma)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.9.5. Lemma)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Bizonyítás

Házi feladat.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.9.5. Lemma)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Bizonyítás

Házi feladat.

Példa

Legyen p prímszám. Előző tétel: $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$.

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.9.5. Lemma)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Bizonyítás

Házi feladat.

Példa

Legyen p prímszám. Előző tétel: $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} =$$

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.9.5. Lemma)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Bizonyítás

Házi feladat.

Példa

Legyen p prímszám. Előző tétel: $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}.$$

A körosztási polinom kiszámítása

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.9.5. Lemma)

Ha $n \geq 1$, akkor $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$.

Bizonyítás

Házi feladat.

Példa

Legyen p prímszám. Előző tétel: $\Phi_1(x)\Phi_p(x) = x^p - 1$. Így

$$\Phi_p(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}.$$

Következmény (Kiss-jegyzet, 3.9.7. Következmény)

Mindegyik körosztási polinom egész együtthatós.

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent.

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$,

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q =$$

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4).$$

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4).$$

Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$,

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4).$$

Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz

$$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$$

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4).$$

Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz

$$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$$

a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4).$$

Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz

$$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$$

a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

(1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4).$$

Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz

$$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$$

a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

- (1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.
- (2) Ezzel a problémát **négyzetgyökvonásra vezettük vissza.**

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4).$$

Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz

$$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$$

a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

- (1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.
- (2) Ezzel a problémát **négyzetgyökvonásra vezettük vissza**.
- (3) Ha $p^2/4 - q \neq 0$, akkor két megoldás van,

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4).$$

Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz

$$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$$

a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

- (1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.
- (2) Ezzel a problémát **négyzetgyökvonásra vezettük vissza**.
- (3) Ha $p^2/4 - q \neq 0$, akkor két megoldás van, mert minden nem nulla komplex számnak két négyzetgyöke van.

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4).$$

Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz

$$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$$

a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

- (1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.
- (2) Ezzel a problémát **négyzetgyökvonásra vezettük vissza**.
- (3) Ha $p^2/4 - q \neq 0$, akkor két megoldás van, mert minden nem nulla komplex számnak két négyzetgyöke van.
- (4) Ha $p^2/4 - q = 0$, akkor egy megoldás van,

A másodfokú egyenlet

Az $y^2 + py + q = 0$ egyenletben vezessük be az $x = y + p/2$ új ismeretlent. Ekkor $y = x - p/2$, ahonnan

$$y^2 + py + q = (x - p/2)^2 + p(x - p/2) + q = x^2 + (q - p^2/4).$$

Ha ez nulla, akkor $x = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$, azaz

$$y = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$$

a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

Tanulságok

- (1) Az $y \mapsto y - p/2$ helyettesítés eltünteti az elsőfokú tagot.
- (2) Ezzel a problémát **négyzetgyökvonásra vezettük vissza**.
- (3) Ha $p^2/4 - q \neq 0$, akkor két megoldás van, mert minden nem nulla komplex számnak két négyzetgyöke van.
- (4) Ha $p^2/4 - q = 0$, akkor egy megoldás van, amely az $y^2 + py + q$ polinomnak kétszeres gyöke.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3 -mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3 -mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.
Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3 -mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.

Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést.

Kiesik az x^2 -es tag,

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3 -mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.

Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést.

Kiesik az x^2 -es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3 -mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.

Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést.

Kiesik az x^2 -es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ha ezt sikerülne megoldani, akkor az eredetit is.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3 -mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.

Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést.

Kiesik az x^2 -es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ha ezt sikerülne megoldani, akkor az eredetit is.

A másodfokú egyenlet megoldását (geometriai módszerekkel) már az ókori görögök is ismerték.

A harmadfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_3 \neq 0$, akkor ez az **általános harmadfokú egyenlet**.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_3 -mal elosztva feltehető, hogy $a_3 = 1$.

Ezután végezzük el az $y = x - a_2/3$ helyettesítést.

Kiesik az x^2 -es tag, és az egyenlet a következő alakú lesz:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ha ezt sikerülne megoldani, akkor az eredetit is.

A másodfokú egyenlet megoldását (geometriai módszerekkel) már az ókori görögök is ismerték. A most következő ötletet **Scipione del Ferro** és **Niccolo Tartaglia** fedezte fel, 1530 körül.

A megoldás ötlete

Ötlet (Kiss-jegyzet, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

A megoldás ötlete

Ötlet (Kiss-jegyzet, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve,

A megoldás ötlete

Ötlet (Kiss-jegyzet, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve,

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

A megoldás ötlete

Ötlet (Kiss-jegyzet, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

A megoldás ötlete

Ötlet (Kiss-jegyzet, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

A megoldás ötlete

Ötlet (Kiss-jegyzet, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis HA $-3uv = p$

A megoldás ötlete

Ötlet (Kiss-jegyzet, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis HA $-3uv = p$ és $-(u^3 + v^3) = q$,

A megoldás ötlete

Ötlet (Kiss-jegyzet, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis **HA** $-3uv = p$ és $-(u^3 + v^3) = q$,

AKKOR $x = u + v$ megoldása a harmadfokú egyenletnek.

A megoldás ötlete

Ötlet (Kiss-jegyzet, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis **HA** $-3uv = p$ és $-(u^3 + v^3) = q$,

AKKOR $x = u + v$ megoldása a harmadfokú egyenletnek.

Innen $u^3v^3 = (-p/3)^3$,

A megoldás ötlete

Ötlet (Kiss-jegyzet, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis **HA** $-3uv = p$ és $-(u^3 + v^3) = q$,

AKKOR $x = u + v$ megoldása a harmadfokú egyenletnek.

Innen $u^3v^3 = (-p/3)^3$, és $u^3 + v^3 = -q$.

A megoldás ötlete

Ötlet (Kiss-jegyzet, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis **HA** $-3uv = p$ és $-(u^3 + v^3) = q$,

AKKOR $x = u + v$ megoldása a harmadfokú egyenletnek.

Innen $u^3v^3 = (-p/3)^3$, és $u^3 + v^3 = -q$. Ezért u^3 és v^3 gyökei az $z^2 + qz - (p/3)^3 = 0$ másodfokú egyenletnek.

A megoldás ötlete

Ötlet (Kiss-jegyzet, 1.2. Szakasz)

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Átrendezve, és $x = u + v$ -t helyettesítve:

$$(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0$$

Vagyis **HA** $-3uv = p$ és $-(u^3 + v^3) = q$,

AKKOR $x = u + v$ megoldása a harmadfokú egyenletnek.

Innen $u^3v^3 = (-p/3)^3$, és $u^3 + v^3 = -q$. Ezért u^3 és v^3 gyökei az $z^2 + qz - (p/3)^3 = 0$ másodfokú egyenletnek. Így

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl,

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

Tétel

- (1) Ha az itt szereplő u és v köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk $-p/3$ legyen, akkor f gyökét kapjuk.

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

Tétel

- (1) Ha az itt szereplő u és v köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk $-p/3$ legyen, akkor f gyökét kapjuk.
- (2) Az f mindegyik gyöke megkapható ezen a módon.

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

Tétel

- (1) Ha az itt szereplő u és v köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk $-p/3$ legyen, akkor f gyökét kapjuk.
- (2) Az f mindegyik gyöke megkapható ezen a módon.
- (3) Az f -nek pontosan akkor van többszörös gyöke, ha a négyzetgyök alatt álló $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ kifejezés nulla.

Cardano képlete

Az $f(x) = x^3 + px + q$ gyökei **Cardano képletéből** kaphatók:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Tartaglia fedezte föl, Cardano publikálta (*Ars Magna*, 1545).

Tétel

- (1) Ha az itt szereplő u és v köbgyököket úgy választjuk, hogy szorzatuk $-p/3$ legyen, akkor f gyökét kapjuk.
- (2) Az f mindegyik gyöke megkapható ezen a módon.
- (3) Az f -nek pontosan akkor van többszörös gyöke, ha a négyzetgyök alatt álló $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ kifejezés nulla.

Bizonyítás: Kiss-jegyzet, 3.8. Szakasz.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$,

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszorősei**.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszörösei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszörösei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$,

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszörösei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$$u_2 = u_1 \varepsilon =$$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszorősei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$$u_2 = u_1 \varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszörösei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszörösei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszörösei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszörösei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszorősei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszörösei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszorősei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$.

Innen $x_2 = u_2 + v_2 = -5$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszőrősei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$.

Innen $x_2 = u_2 + v_2 = -5$ és $x_3 = u_3 + v_3 = 1$.

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszörösei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$.

Innen $x_2 = u_2 + v_2 = -5$ és $x_3 = u_3 + v_3 = 1$.

Ellenőrzés: $(x - 1)(x - 4)(x + 5) =$

Példa a képlet használatára

Példa

Legyen $f(x) = x^3 - 21x + 20$. Ekkor a Cardano-képletből

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}.$$

Könnyen ellenőrizhető: $(2 + i\sqrt{3})^3 = -10 + i\sqrt{243}$.

Ha $u = 2 + i\sqrt{3}$, akkor $v = (-p/3)/u = 7/(2 + i\sqrt{3}) = 2 - i\sqrt{3}$.

Ezért $x = u + v = (2 + i\sqrt{3}) + (2 - i\sqrt{3}) = 4$ az egyik gyök.

Az f másik két gyökét a $-10 + i\sqrt{243}$ másik két köbgyöke adja.

Ezek $u = 2 + i\sqrt{3}$ **harmadik egységgyökökszörösei**.

Ha $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, akkor

$u_2 = u_1\varepsilon = -5/2 + i\sqrt{3}/2$ és $v_2 = (-p/3)/u_2 = -5/2 - i\sqrt{3}/2$

$u_3 = u_1\varepsilon^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$ és $v_3 = (-p/3)/u_3 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$.

Innen $x_2 = u_2 + v_2 = -5$ és $x_3 = u_3 + v_3 = 1$.

Ellenőrzés: $(x - 1)(x - 4)(x + 5) = x^3 - 21x + 20$.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**,

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni.
Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni.
Ez a **Casus Irreducibilis**.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.8.2. Tétel)

Legyen $f(x) = x^3 + px + q$,

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.8.2. Tétel)

Legyen $f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q **valósak**,

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.8.2. Tétel)

Legyen $f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q **valósak**, és $D = p^2/4 - q$.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.8.2. Tétel)

Legyen $f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q **valósak**, és $D = p^2/4 - q$.

(1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.8.2. Tétel)

Legyen $f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q **valósak**, és $D = p^2/4 - q$.

- (1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.
- (2) Ha $D = 0$: minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.8.2. Tétel)

Legyen $f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q **valósak**, és $D = p^2/4 - q$.

- (1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.
- (2) Ha $D = 0$: minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.
- (3) Ha $D > 0$: három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós,

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.8.2. Tétel)

Legyen $f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q **valósak**, és $D = p^2/4 - q$.

- (1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.
- (2) Ha $D = 0$: minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.
- (3) Ha $D > 0$: három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós, és egymás konjugáltjai.

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.8.2. Tétel)

Legyen $f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q **valósak**, és $D = p^2/4 - q$.

- (1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.
- (2) Ha $D = 0$: minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.
- (3) Ha $D > 0$: három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós, és egymás konjugáltjai.

Az (1) esetben **semmilyen más, valósban maradó „gyökképlet” sem adhatja egyik gyököt sem!**

Casus irreducibilis

Az $x^3 - 21x + 20$ mindhárom gyöke **valós**, mégis a Cardano-képletben negatív számból kellett négyzetgyököt vonni. Aki nem ismeri a komplex számokat, nem tudja megtenni. Ez a **Casus Irreducibilis**. Így fedezték fel a komplex számokat.

Tétel (Kiss-jegyzet, 3.8.2. Tétel)

Legyen $f(x) = x^3 + px + q$, ahol p, q **valósak**, és $D = p^2/4 - q$.

- (1) Ha $D < 0$: három különböző gyök van, mind valós.
- (2) Ha $D = 0$: minden gyök valós, az egyik legalább kétszeres.
- (3) Ha $D > 0$: három különböző gyök van, az egyik valós, a másik kettő nem valós, és egymás konjugáltjai.

Az (1) esetben **semmilyen más, valósban maradó „gyökképlet” sem adhatja egyik gyököt sem!** (A **Casus Irreducibilis Tétele**, Kiss-jegyzet, 6.10.2. Tétel.)

A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_4 \neq 0$, akkor ez az **általános negyedfokú egyenlet**.

A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_4 \neq 0$, akkor ez az **általános negyedfokú egyenlet**.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_4 -gyel elosztva feltehető, hogy $a_4 = 1$.

A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_4 \neq 0$, akkor ez az **általános negyedfokú egyenlet**.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_4 -gyel elosztva feltehető, hogy $a_4 = 1$.

Az $x \mapsto x - a_3/4$ helyettesítéssel kiesik az x^3 -ös tag.

A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_4 \neq 0$, akkor ez az **általános negyedfokú egyenlet**.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_4 -gyel elosztva feltehető, hogy $a_4 = 1$.

Az $x \mapsto x - a_3/4$ helyettesítéssel kiesik az x^3 -ös tag.

Ötlet (lásd Kiss-jegyzet, 3.8.4. Tétel)

Egy harmadfokú egyenlet megoldásával a fenti polinom két másodfokú polinom szorzatára bontható.

A negyedfokú egyenlet

Határozzuk meg az $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ egyenlet összes megoldását \mathbb{C} -ben ($a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$).

Ha $a_4 \neq 0$, akkor ez az **általános negyedfokú egyenlet**.

A kézenfekvő redukciós lépések

Az egyenletet a_4 -gyel elosztva feltehető, hogy $a_4 = 1$.

Az $x \mapsto x - a_3/4$ helyettesítéssel kiesik az x^3 -ös tag.

Ötlet (lásd Kiss-jegyzet, 3.8.4. Tétel)

Egy harmadfokú egyenlet megoldásával a fenti polinom két másodfokú polinom szorzatára bontható.

Ezért az összes gyök megkapható az együtthatókból a négy alaplóművelet és gyökkvonás segítségével.

A legalább ötödfokú egyenletek

Tétel (Kiss-jegyzet, 6.9.7. Tétel)

Ha $n \geq 5$, akkor az **általános** n -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alapművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

A legalább ötödfokú egyenletek

Tétel (Kiss-jegyzet, 6.9.7. Tétel)

Ha $n \geq 5$, akkor az **általános** n -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd Kiss-jegyzet, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A legalább ötödfokú egyenletek

Tétel (Kiss-jegyzet, 6.9.7. Tétel)

Ha $n \geq 5$, akkor az **általános** n -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd Kiss-jegyzet, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a **Galois-elmélet** eredményei.

A legalább ötödfokú egyenletek

Tétel (Kiss-jegyzet, 6.9.7. Tétel)

Ha $n \geq 5$, akkor az **általános** n -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd Kiss-jegyzet, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a **Galois-elmélet** eredményei.

Felfedezők: Niels Henrik Abel,

A legalább ötödfokú egyenletek

Tétel (Kiss-jegyzet, 6.9.7. Tétel)

Ha $n \geq 5$, akkor az **általános** n -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alpművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd Kiss-jegyzet, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a **Galois-elmélet** eredményei.

Felfedezők: **Niels Henrik Abel**, **Evariste Galois** (1830 körül).

A legalább ötödfokú egyenletek

Tétel (Kiss-jegyzet, 6.9.7. Tétel)

Ha $n \geq 5$, akkor az **általános** n -edfokú egyenletre **nem létezik** olyan képlet, amely a négy alapművelet és gyökvonások segítségével megadja a megoldásokat.

Tétel (lásd Kiss-jegyzet, 6.9. Szakasz)

Konkrétan az $x^5 - 4x + 2$ polinom egyik gyöke sem írható föl ilyen gyökképlet segítségével.

A bizonyítások a **Galois-elmélet** eredményei.

Felfedezők: **Niels Henrik Abel**, **Evariste Galois** (1830 körül).

Ezt a harmadik félévben tárgyaljuk (Kiss-jegyzet, 6. Fejezet).