Algebra1, alapszint

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
ewkiss@cs.elte.hu

1. előadás

A félév anyaga

- Komplex számok

A félév anyaga

- Komplex számok
  - Műveletek

A félév anyaga

- Komplex számok
  - Műveletek
  - Kapcsolat a geometriával

A félév anyaga

- Komplex számok
  - Műveletek
  - Kapcsolat a geometriával
  - Gyökvonás

A félév anyaga

- Komplex számok
  - Műveletek
  - Kapcsolat a geometriával
  - Gyökvonás
- Polinomok

A félév anyaga

- Komplex számok
  - Műveletek
  - Kapcsolat a geometriával
  - Gyökvonás
- Polinomok
  - A gyökök száma

A félév anyaga

- Komplex számok
  - Műveletek
  - Kapcsolat a geometriával
  - Gyökvonás
- Polinomok
  - A gyökök száma
  - A gyökök és együtthatók összefüggése

A félév anyaga

- Komplex számok
  - Műveletek
  - Kapcsolat a geometriával
  - Gyökvonás
- Polinomok
  - A gyökök száma
  - A gyökök és együtthatók összefüggése
  - Szorzatra bontás, számelméleti kérdések

A félév anyaga

- Komplex számok
  - Műveletek
  - Kapcsolat a geometriával
  - Gyökvonás
- Polinomok
  - A gyökök száma
  - A gyökök és együtthatók összefüggése
  - Szorzatra bontás, számelméleti kérdések
  - A harmad- és negyedfokú egyenlet

A félév anyaga

- Komplex számok
    - Műveletek
    - Kapcsolat a geometriával
    - Gyökvonás
- Polinomok
    - A gyökök száma
    - A gyökök és együtthatók összefüggése
    - Szorzatra bontás, számelméleti kérdések
    - A harmad- és negyedfokú egyenlet
- Lineáris algebra

A félév anyaga

- Komplex számok
  - Műveletek
  - Kapcsolat a geometriával
  - Gyökvonás
- Polinomok
  - A gyökök száma
  - A gyökök és együtthatók összefüggése
  - Szorzatra bontás, számelméleti kérdések
  - A harmad- és negyedfokú egyenlet
- Lineáris algebra
  - Lineáris egyenletrendszerek

A félév anyaga

- Komplex számok
  - Műveletek
  - Kapcsolat a geometriával
  - Gyökvonás
- Polinomok
  - A gyökök száma
  - A gyökök és együtthatók összefüggése
  - Szorzatra bontás, számelméleti kérdések
  - A harmad- és negyedfokú egyenlet
- Lineáris algebra
  - Lineáris egyenletrendszerek
  - Műveletek vektorokkal

A félév anyaga

- Komplex számok
  - Műveletek
  - Kapcsolat a geometriával
  - Gyökvonás
- Polinomok
  - A gyökök száma
  - A gyökök és együtthatók összefüggése
  - Szorzatra bontás, számelméleti kérdések
  - A harmad- és negyedfokú egyenlet
- Lineáris algebra
  - Lineáris egyenletrendszerek
  - Műveletek vektorokkal
  - Geometriai transzformációk megadása mátrixokkal

A félév anyaga

- Komplex számok
  - Műveletek
  - Kapcsolat a geometriával
  - Gyökvonás
- Polinomok
  - A gyökök száma
  - A gyökök és együtthatók összefüggése
  - Szorzatra bontás, számelméleti kérdések
  - A harmad- és negyedfokú egyenlet
- Lineáris algebra
  - Lineáris egyenletrendszerek
  - Műveletek vektorokkal
  - Geometriai transzformációk megadása mátrixokkal
  - Determinánsok és alkalmazásaik

Irodalom

- http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/

Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata

Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
    - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
    - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok

Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről

Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
    - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
    - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
    - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
    - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom

Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az Absztrakt Algebrába

  `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook`

Irodalom

- http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/
    - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
    - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
    - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
    - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az Absztrakt Algebrába

  www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook
    - Komplex számok, polinomok

Irodalom

- http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az Absztrakt Algebrába

  www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook

  - Komplex számok, polinomok
  - A későbbi félévek anyaga (csoportok, gyűrűk)

Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az Absztrakt Algebrába

  `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook`
  - Komplex számok, polinomok
  - A későbbi félévek anyaga (csoportok, gyűrűk)
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai

Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
    - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
    - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
    - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
    - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az Absztrakt Algebrába

  `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook`
    - Komplex számok, polinomok
    - A későbbi félévek anyaga (csoportok, gyűrűk)
    - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- Freud Róbert: Lineáris algebra

Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az Absztrakt Algebrába

  `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook`
  - Komplex számok, polinomok
  - A későbbi félévek anyaga (csoportok, gyűrűk)
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- Freud Róbert: Lineáris algebra
  - Az első három félév lineáris algebra anyaga

Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az Absztrakt Algebrába

  `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook`
  - Komplex számok, polinomok
  - A későbbi félévek anyaga (csoportok, gyűrűk)
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- Freud Róbert: Lineáris algebra
  - Az első három félév lineáris algebra anyaga
  - Feladatok megoldásokkal

Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az Absztrakt Algebrába

  `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook`
  - Komplex számok, polinomok
  - A későbbi félévek anyaga (csoportok, gyűrűk)
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- Freud Róbert: Lineáris algebra
  - Az első három félév lineáris algebra anyaga
  - Feladatok megoldásokkal
- További feladatgyűjtemények

Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az Absztrakt Algebrába

  `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook`
  - Komplex számok, polinomok
  - A későbbi félévek anyaga (csoportok, gyűrűk)
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- Freud Róbert: Lineáris algebra
  - Az első három félév lineáris algebra anyaga
  - Feladatok megoldásokkal
- További feladatgyűjtemények
  - Fagyejev-Szominszkij: Felsőfokú algebrai feladatok

Irodalom

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- Kiss Emil: Bevezetés az Absztrakt Algebrába

  `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook`
  - Komplex számok, polinomok
  - A későbbi félévek anyaga (csoportok, gyűrűk)
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- Freud Róbert: Lineáris algebra
  - Az első három félév lineáris algebra anyaga
  - Feladatok megoldásokkal
- További feladatgyűjtemények
  - Fagyejev-Szominszkij: Felsőfokú algebrai feladatok
  - Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
    - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak
      a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak
    a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- Az anyagot meg is kell érteni!

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- Az anyagot meg is kell érteni!
  - a megértés az alkalmazás képessége;

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- Az anyagot meg is kell érteni!
  - a megértés az alkalmazás képessége;
  - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a jegyzetben;

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak
    a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- Az anyagot meg is kell érteni!
  - a megértés az alkalmazás képessége;
  - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a jegyzetben;
  - fontos a logikai szabatosság, a gondolkodás fejlesztése.

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- Az anyagot meg is kell érteni!
  - a megértés az alkalmazás képessége;
  - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a jegyzetben;
  - fontos a logikai szabatosság, a gondolkodás fejlesztése.
- Elméleti matematikából csak kevesen fognak megélni!
  Hozzá célszerű tanulni mást is, például:

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- Az anyagot meg is kell érteni!
  - a megértés az alkalmazás képessége;
  - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a jegyzetben;
  - fontos a logikai szabatosság, a gondolkodás fejlesztése.
- Elméleti matematikából csak kevesen fognak megélni!
  Hozzá célszerű tanulni mást is, például:
  - biológia, fizika, kémia, informatika, tanári mesterség;

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- Az anyagot meg is kell érteni!
  - a megértés az alkalmazás képessége;
  - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a jegyzetben;
  - fontos a logikai szabatosság, a gondolkodás fejlesztése.
- Elméleti matematikából csak kevesen fognak megélni!
  Hozzá célszerű tanulni mást is, például:
  - biológia, fizika, kémia, informatika, tanári mesterség;
  - közgazdasági ismeretek, mérnöki tudományok.

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- Az anyagot meg is kell érteni!
  - a megértés az alkalmazás képessége;
  - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a jegyzetben;
  - fontos a logikai szabatosság, a gondolkodás fejlesztése.
- Elméleti matematikából csak kevesen fognak megélni!
  Hozzá célszerű tanulni mást is, például:
  - biológia, fizika, kémia, informatika, tanári mesterség;
  - közgazdasági ismeretek, mérnöki tudományok.
- Használjátok a számítógépet!

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- Az anyagot meg is kell érteni!
  - a megértés az alkalmazás képessége;
  - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a jegyzetben;
  - fontos a logikai szabatosság, a gondolkodás fejlesztése.
- Elméleti matematikából csak kevesen fognak megélni!
  Hozzá célszerű tanulni mást is, például:
  - biológia, fizika, kémia, informatika, tanári mesterség;
  - közgazdasági ismeretek, mérnöki tudományok.
- Használjátok a számítógépet!
  - Kérjetek accountot a `cs.elte.hu`-ra.

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- Az anyagot meg is kell érteni!
  - a megértés az alkalmazás képessége;
  - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a jegyzetben;
  - fontos a logikai szabatosság, a gondolkodás fejlesztése.
- Elméleti matematikából csak kevesen fognak megélni!
  Hozzá célszerű tanulni mást is, például:
  - biológia, fizika, kémia, informatika, tanári mesterség;
  - közgazdasági ismeretek, mérnöki tudományok.
- Használjátok a számítógépet!
  - Kérjetek accountot a `cs.elte.hu`-ra.
  - Konzultációs gyorssegély: `ewkiss@cs.elte.hu`

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- Az anyagot meg is kell érteni!
  - a megértés az alkalmazás képessége;
  - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a jegyzetben;
  - fontos a logikai szabatosság, a gondolkodás fejlesztése.
- Elméleti matematikából csak kevesen fognak megélni!
  Hozzá célszerű tanulni mást is, például:
  - biológia, fizika, kémia, informatika, tanári mesterség;
  - közgazdasági ismeretek, mérnöki tudományok.
- Használjátok a számítógépet!
  - Kérjetek accountot a `cs.elte.hu`-ra.
  - Konzultációs gyorssegély: `ewkiss@cs.elte.hu`
  - TeX, `Linux`, `Maple`, `Mathematica`, `GAP`.

Általános tanácsok

- Az előadáson figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**
  Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- Az anyagot meg is kell érteni!
  - a megértés az alkalmazás képessége;
  - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a jegyzetben;
  - fontos a logikai szabatosság, a gondolkodás fejlesztése.
- Elméleti matematikából csak kevesen fognak megélni!
  Hozzá célszerű tanulni mást is, például:
  - biológia, fizika, kémia, informatika, tanári mesterség;
  - közgazdasági ismeretek, mérnöki tudományok.
- Használjátok a számítógépet!
  - Kérjetek accountot a `cs.elte.hu`-ra.
  - Konzultációs gyorssegély: `ewkiss@cs.elte.hu`
  - $\TeX$, `Linux`, `Maple`, `Mathematica`, `GAP`.
- Aki letegez benneteket, tegezzétek vissza!

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;
    - az előző héten feladott felzárkóztató házi feladatokból.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;
    - az előző héten feladott felzárkóztató házi feladatokból.
  - Írásbeli házi feladatok: összesen további 10%.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;
    - az előző héten feladott felzárkóztató házi feladatokból.
  - Írásbeli házi feladatok: összesen további 10%.
  - Két évfolyamzárthelyi: 40 – 40%;

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;
    - az előző héten feladott felzárkóztató házi feladatokból.
  - Írásbeli házi feladatok: összesen további 10%.
  - Két évfolyamzárthelyi: 40 – 40%;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
    - Csak három hiányzás megengedett.
    - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
        - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
        - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;
        - az előző héten feladott felzárkóztató házi feladatokból.
    - Írásbeli házi feladatok: összesen további 10%.
    - Két évfolyamzárthelyi: 40 – 40%;
        - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
        - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;
    - az előző héten feladott felzárkóztató házi feladatokból.
  - Írásbeli házi feladatok: összesen további 10%.
  - Két évfolyamzárthelyi: 40 – 40%;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;
    - az előző héten feladott felzárkóztató házi feladatokból.
  - Írásbeli házi feladatok: összesen további 10%.
  - Két évfolyamzárthelyi: $40 - 40\%$;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;
    - az előző héten feladott felzárkóztató házi feladatokból.
  - Írásbeli házi feladatok: összesen további 10%.
  - Két évfolyamzárthelyi: 40 – 40%;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;
    - az előző héten feladott felzárkóztató házi feladatokból.
  - Írásbeli házi feladatok: összesen további 10%.
  - Két évfolyamzárthelyi: 40 – 40%;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri;

A számonkérés módja

- A gyakorlati jegy:
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;
    - az előző héten feladott felzárkóztató házi feladatokból.
  - Írásbeli házi feladatok: összesen további 10%.
  - Két évfolyamzárthelyi: 40 – 40%;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- A vizsgajegy:
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri;
  - Összesen három alkalom;
    egyre kell eljönni, kivéve ha az nem sikerül.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Bizonyítás

Ha n természetes szám, akkor $n + 3 \geq 3$.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n+3=1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2=-1$.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n. Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2 = -1$.

Bizonyítás

Ha $r \geq 0$, akkor $r^2 \geq 0$.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2 = -1$.

Bizonyítás

Ha $r \geq 0$, akkor $r^2 \geq 0$.
Ha $r < 0$, akkor is $r^2 = (-r)^2 \geq 0$.

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2 = -1$.

Ezért be fogjuk vezetni a komplex számokat,
amelyek hasznosnak bizonyulnak majd

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2 = -1$.

Ezért be fogjuk vezetni a komplex számokat,
amelyek hasznosnak bizonyulnak majd

- egyenletek megoldásakor;

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n.
Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2 = -1$.

Ezért be fogjuk vezetni a komplex számokat,
amelyek hasznosnak bizonyulnak majd

- egyenletek megoldásakor;
- geometriai alakzatok, valós függvények megértésekor;

A számkör bővítése

Tétel

Nincs olyan n természetes szám, melyre $n + 3 = 1$.

Ezért bevezettük a negatív számokat, közöttük van ilyen n. Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

Tétel

Nincs olyan r valós szám, melyre $r^2 = -1$.

Ezért be fogjuk vezetni a komplex számokat, amelyek hasznosnak bizonyulnak majd

- egyenletek megoldásakor;
- geometriai alakzatok, valós függvények megértésekor;
- a fizikában (folyadékok áramlása, kvantummechanika, a téridő szerkezete).

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1 + i)^2$?

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i =$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1 + i)^2$?

$$(1 + i)(1 + i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1$$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 = 2i.$$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$$(1+i)(1+i) = 1\cdot 1 + 1\cdot i + i\cdot 1 + i\cdot i = 1 + i + i - 1 = 2i.$$

Csak ez lehet az eredmény.

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) =$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) =$ $\qquad$ $(bi)(di) = -bd;$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1 + i)^2$?

$(1 + i)(1 + i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a + bi) + (c + di) =$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a+bi) + (c+di) = (a+c) +$

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 = 2i$.

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$.

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$.

Az i-vel úgy számolunk, mintha ismeretlen lenne,

Mi az a komplex szám?

Az i betű olyan „számot” jelöl, melyre $i^2 = -1$.

Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.

Mennyi lehet $(1+i)^2$?

$(1+i)(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

Hasonlóan (HF ellenőrizni)

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$.

Az i-vel úgy számolunk, mintha ismeretlen lenne,
de i^2 helyett -1-et írunk.

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ **valós része** $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ **képzetes része** $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész **valós** szám, **nem** bi.

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, nem bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, nem bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, nem bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$,

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, nem bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ **valós része** $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ **képzetes része** $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész **valós** szám, **nem** bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ **valós része** $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ **képzetes része** $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész **valós** szám, **nem** bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A valós számokat is komplex számnak képzeljük: $a = a + 0i$.

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a+bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z=a+bi$ valós része $\mathrm{Re}(z)=a$.
A $z=a+bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z)=b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, nem bi.

Az $a+bi$ csak akkor egyenlő $c+di$-vel, ha $a=c$ és $b=d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A valós számokat is komplex számnak képzeljük: $a=a+0i$.
A bi alakú számok tisztán képzetesek

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, nem bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A valós számokat is komplex számnak képzeljük: $a = a + 0i$.
A bi alakú számok tisztán képzetesek (valós részük nulla).

A komplex számok definíciója

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol a és b valós számok.
A $z = a + bi$ valós része $\mathrm{Re}(z) = a$.
A $z = a + bi$ képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$.

Figyelem! A képzetes rész valós szám, nem bi.

Az $a + bi$ csak akkor egyenlő $c + di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A valós számokat is komplex számnak képzeljük: $a = a + 0i$.
A bi alakú számok tisztán képzetesek (valós részük nulla).

Az i az imaginárius (képzetes) szó rövidítése.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=$

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+$

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

A $z \in \mathbb{C}$ **ellentettje** w, ha $z+w=0$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

A $z \in \mathbb{C}$ ellentettje w, ha $z+w=0$. Az ellentett jele $-z$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.
$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

A $z \in \mathbb{C}$ ellentettje w, ha $z + w = 0$. Az ellentett jele $-z$.
A $z = a + bi$ (egyetlen) ellentettje

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

A $z\in\mathbb{C}$ ellentettje w, ha $z+w=0$. Az ellentett jele $-z$.
A $z=a+bi$ (egyetlen) ellentettje $w=(-a)+$

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

A $z \in \mathbb{C}$ ellentettje w, ha $z+w=0$. Az ellentett jele $-z$.
A $z=a+bi$ (egyetlen) ellentettje $w=(-a)+(-b)i$.

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

A $z\in\mathbb{C}$ ellentettje w, ha $z+w=0$. Az ellentett jele $-z$.
A $z=a+bi$ (egyetlen) ellentettje $w=(-a)+(-b)i$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $u-z=$

Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett

Jelölések:

A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$.
A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$.
Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

A $z \in \mathbb{C}$ ellentettje w, ha $z+w=0$. Az ellentett jele $-z$.
A $z=a+bi$ (egyetlen) ellentettje $w=(-a)+(-b)i$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $u-z=u+(-z)$.

Osztás, reciprok

A w komplex szám reciproka u, ha $wu = 1$.

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Osztás, reciprok

A w komplex szám reciproka u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az osztás a reciprokkal való szorzás:

Osztás, reciprok

A w komplex szám reciproka u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az osztás a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$,

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Osztás, reciprok

A w komplex szám reciproka u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az osztás a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Osztás, reciprok

A w komplex szám reciproka u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az osztás a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

Osztás, reciprok

A w komplex szám reciproka u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az osztás a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1 + i)(1 - i) =$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 =$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) =$

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$$(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \frac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\frac{z}{w} = z\frac{1}{w}$, mert $z\frac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$. Tehát

$$(1 + i)\frac{1 - i}{2} = 1$$

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$. Tehát

$$(1+i)\frac{1-i}{2} = 1\,, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} =$$

Osztás, reciprok

A w komplex szám **reciproka** u, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az **osztás** a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

Ötlet: Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$. Tehát

$$(1+i)\frac{1-i}{2} = 1\,, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\,.$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) =$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 =$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) =$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény nem $a^2 - b^2$!

A reciprok kiszámítása

Az $a+bi$ reciprokának kiszámításához $a-bi$-vel jó bővíteni.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény nem $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a+bi} =$$

A reciprok kiszámítása

Az $a+bi$ reciprokának kiszámításához $a-bi$-vel jó bővíteni.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény nem $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} =$$

A reciprok kiszámítása

Az $a+bi$ reciprokának kiszámításához $a-bi$-vel jó bővíteni.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény nem $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} =$$

A reciprok kiszámítása

Az $a+bi$ reciprokának kiszámításához $a-bi$-vel jó bővíteni.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény nem $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\,.$$

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény nem $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i\,.$$

Ez értelmes, ha $a + bi \neq 0$,

A reciprok kiszámítása

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény nem $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i\,.$$

Ez értelmes, ha $a + bi \neq 0$, mert ekkor a és b egyike nem nulla,

A reciprok kiszámítása

Az $a+bi$ reciprokának kiszámításához $a-bi$-vel jó bővíteni.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény nem $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\,.$$

Ez értelmes, ha $a+bi \neq 0$, mert ekkor a és b egyike nem nulla, és ezért $a^2+b^2 > 0$ (azaz nem nulla).

A reciprok kiszámítása

Az $a+bi$ reciprokának kiszámításához $a-bi$-vel jó bővíteni.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2-(-b^2) = a^2+b^2.$$

Figyelem! Az eredmény nem a^2-b^2!

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\,.$$

Ez értelmes, ha $a+bi \neq 0$, mert ekkor a és b egyike nem nulla, és ezért $a^2+b^2>0$ (azaz nem nulla).

Következmény

Minden nem nulla komplex számnak van reciproka

A reciprok kiszámítása

Az $a+bi$ reciprokának kiszámításához $a-bi$-vel jó bővíteni.

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$$

Figyelem! Az eredmény nem $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i\,.$$

Ez értelmes, ha $a+bi \neq 0$, mert ekkor a és b egyike nem nulla, és ezért $a^2+b^2 > 0$ (azaz nem nulla).

Következmény

Minden nem nulla komplex számnak van reciproka, ezért minden nem nulla komplex számmal lehet osztani.

Konjugált és abszolút érték

Definíció

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.

Konjugált és abszolút érték

Definíció

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Konjugált és abszolút érték

Definíció

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.

A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Konjugált és abszolút érték

Definíció

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Konjugált és abszolút érték

Definíció

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés

Komplex számok között nem igaz, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$.

Konjugált és abszolút érték

Definíció

A $z = a + bi$ **konjugáltja** $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ **abszolút értéke** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés

Komplex számok között **nem igaz**, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$. Például $|1 + i| = \sqrt{2}$, ami nem $1 + i$ és nem $-(1 + i)$.

Konjugált és abszolút érték

Definíció

A $z = a + bi$ **konjugáltja** $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ **abszolút értéke** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés

Komplex számok között **nem igaz**, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$. Például $|1 + i| = \sqrt{2}$, ami nem $1 + i$ és nem $-(1 + i)$.
Ha $z = a + 0i$ valós, akkor abszolút értéke $\sqrt{a^2}$,

Konjugált és abszolút érték

Definíció

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés

Komplex számok között nem igaz, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$. Például $|1 + i| = \sqrt{2}$, ami nem $1 + i$ és nem $-(1 + i)$.
Ha $z = a + 0i$ valós, akkor abszolút értéke $\sqrt{a^2}$,
tehát ugyanaz, mint az abszolút érték „régi” értelme.

Konjugált és abszolút érték

Definíció

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés

Komplex számok között nem igaz, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$. Például $|1 + i| = \sqrt{2}$, ami nem $1 + i$ és nem $-(1 + i)$.
Ha $z = a + 0i$ valós, akkor abszolút értéke $\sqrt{a^2}$, tehát ugyanaz, mint az abszolút érték „régi” értelme.

Nem használhatunk egyenlőtlenségeket nem valós komplex számok között.

Konjugált és abszolút érték

Definíció

A $z = a + bi$ konjugáltja $\overline{z} = a - bi$.
A $z = a + bi$ abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Megjegyzés

Komplex számok között nem igaz, hogy $|z|$ értéke vagy z, vagy $-z$. Például $|1 + i| = \sqrt{2}$, ami nem $1 + i$ és nem $-(1 + i)$.
Ha $z = a + 0i$ valós, akkor abszolút értéke $\sqrt{a^2}$,
tehát ugyanaz, mint az abszolút érték „régi” értelme.

Nem használhatunk egyenlőtlenségeket nem valós komplex számok között. Értelmetlen olyat leírni, hogy $i > 0$ vagy $i < 0$.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

$\overline{z + w} =$

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} =$

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor
$\overline{z+w} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c) - (b+d)i$.

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$.

$\overline{z} + \overline{w} =$

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

$\overline{z+w} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i.$

$\overline{z} + \overline{w} = (a - bi) + (c - di) =$

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i.$

$\overline{z} + \overline{w} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i.$

A konjugált tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha z valós.

(3) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

Mintabizonyítás (3)-ra:

Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor

$\overline{z+w} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i$.

$\overline{z} + \overline{w} = (a-bi)+(c-di) = (a+c)-(b+d)i$.

Ezek tényleg egyenlők.

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\,\overline{z}\,| = |z|$.

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$$|zw|^2 =$$

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$$|zw|^2 =$$

az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\,\overline{z}\,| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$$|zw|^2 =$$

az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt

$$= zw\,\overline{zw} =$$

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$$|zw|^2 =$$

az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt

$$= zw\,\overline{zw} =$$

már tudjuk, hogy a konjugálás szorzattartó

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$$|zw|^2 =$$

az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt

$$= zw\,\overline{zw} =$$

már tudjuk, hogy a konjugálás szorzattartó

$$= zw\,\overline{z}\,\overline{w} =$$

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\overline{z}| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$$|zw|^2 =$$

az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt

$$= zw\,\overline{zw} =$$

már tudjuk, hogy a konjugálás szorzattartó

$$= zw\,\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} =$$

Az abszolút érték tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\,\overline{z}\,| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

Mintabizonyítás (3)-ra:

$$|zw|^2 =$$

az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt

$$= zw\,\overline{zw} =$$

már tudjuk, hogy a konjugálás szorzattartó

$$= zw\,\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2\,.$$

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú elem a nullelem).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x+y = y+x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x+0 = 0+x = x$ (az ilyen tulajdonságú elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

(7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (más szóval az 1 egységelem).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x+y = y+x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x+0 = 0+x = x$ (az ilyen tulajdonságú elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

(7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (más szóval az 1 egységelem).

(8) Minden nem nulla x-nek van reciproka.

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x+y = y+x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x+0 = 0+x = x$ (az ilyen tulajdonságú elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

(7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (más szóval az 1 egységelem).

(8) Minden nem nulla x-nek van reciproka.

(9) $(x+y)z = xz+yz$ (disztributivitás).

A műveleti tulajdonságok

Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (az összeadás asszociatív).

(2) $x+y = y+x$ (az összeadás kommutatív).

(3) $x+0 = 0+x = x$ (az ilyen tulajdonságú elem a nullelem).

(4) Minden x-nek van ellentettje.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

(7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (más szóval az 1 egységelem).

(8) Minden nem nulla x-nek van reciproka.

(9) $(x+y)z = xz+yz$ (disztributivitás).

Mintabizonyítás: Kiss-jegyzet, 1.3.4. Gyakorlat.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: nullosztómentesség.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: nullosztómentesség.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: nullosztómentesség.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: nullosztómentesség.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: nullosztómentesség.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$u(zw)$$

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: nullosztómentesség.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$(uz)w = u(zw)$$

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: nullosztómentesség.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$1 \cdot w = (uz)w = u(zw)$$

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: nullosztómentesség.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw)$$

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: nullosztómentesség.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0$$

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: nullosztómentesség.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0 = 0\,.$$

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: nullosztómentesség.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0 = 0\,.$$

Ezzel elvégeztük a Kiss-jegyzet 1.3. Szakaszát.

Nullosztómentesség

Ha z komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

Tétel

Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: nullosztómentesség.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$.
Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$.
Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0 = 0\,.$$

Ezzel elvégeztük a Kiss-jegyzet 1.3. Szakaszát.
Az 1.1. Szakasz (számolás maradékokkal) a gyakorlaton lesz.