1. Lexikografikus rendezés

A kitevők sorozata.

Példa
$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$. Négy tag van. Mindegyikben írjuk föl a kitevők sorozatát: $x_1^1x_2^1 : 11$, $x_1^4x_2^0 : 40$, $x_1^0x_2^2 : 02$, $x_1^3x_2^1 : 31$. A kapott négy kétjegyű „telefonszámot” rakjuk sorba: $02 < 11 < 31 < 40$, és eszerint rendezzük f tagjait is: $f(x_1, x_2) = 2ix_2^2 + 2x_1x_2 - ix_1^3x_2 - x_1^4$. Ez a tagok *lexikografikus rendezése*.

Általában
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum r_{m_1,m_2,\ldots,m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$. Az általános tag „telefonszáma” $m_1m_2 \ldots m_n$. n-jegyű, akármilyen nagy „számjegy” lehetséges.

A lexikografikus sorrend.
A telefonszámokat úgy rakjuk sorba, ahogy a telefonkönyvben.

Definíció
$P = rx_1^{m_1}x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$ és $Q = sx_1^{k_1}x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$. A telefonszámok: $m_1m_2 \ldots m_n$ és $k_1k_2 \ldots k_n$. Azt mondjuk, hogy P *lexikografikusan kisebb Q-nál*, ha az első olyan j indexnél, ahol a két telefonszám eltér, $m_j < k_j$ teljesül. Precízebben: van olyan $1 \le j \le n$, hogy $m_1 = k_1,\ m_2 = k_2,\ \ldots,\ m_{j-1} = k_{j-1}$, de $m_j < k_j$.

Jelölés
$P \prec Q$ azt jelenti: P lexikografikusan kisebb Q-nál. A $P \preceq Q$ azt jelenti: $P \prec Q$, vagy P és Q az r, s együtthatóktól eltekintve megegyezik (telefonszámuk ugyanaz).

A főtagok szorzata.

Lemma
Tegyük föl, hogy $P' \preceq P$ és $Q' \preceq Q$ teljesül. Ekkor $P'Q' \preceq PQ$. Ha egyenlőség áll, akkor $P' = P$ és $Q' = Q$.

Bizonyítás
Házi Feladat (Kiss-jegyzet, 2.6.6. Lemma).

Definíció
Egy polinom *főtagja* a lexikografikusan legnagyobb tagja.

Példa
$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$ főtagja $-x_1^4$.

A szorzat főtagja.

Lemma
Tegyük föl, hogy $P' \preceq P$ és $Q' \preceq Q$ teljesül. Ekkor $P'Q' \preceq PQ$. Ha egyenlőség áll, akkor $P' = P$ és $Q' = Q$.

Tétel
Szorzat főtagja a főtagok szorzata.

Bizonyítás
Legyen az f polinom főtagja P, a g polinom főtagja Q. Az fg a $P'Q'$ tagok összege, ahol P' befutja az f, Q' ettől függetlenül befutja a g összes tagját. A Lemma miatt $P'Q' \prec PQ$, egyetlen kivétellel: amikor P-t szorozzuk Q-val. Ezért PQ nem esik ki, a többi keletkező tag pedig ennél lexikografikusan kisebb. $\square$

Példa a szorzat főtagjára.

Tétel
Szorzat főtagja a főtagok szorzata.

Megjegyzés
A nullosztómentesség ebből is következik.

Példa
$\sigma_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$,
$\sigma_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
(elemi szimmetrikus polinomok). Mi lesz $\sigma_1^6\sigma_2^3$ főtagja?
A σ_1-beli telefonszámok: 100, 010, 001. Főtag: x_1.
A σ_2-beli telefonszámok: 110, 101, 011. Főtag: x_1x_2.
$\sigma_1^6\sigma_2^3$ főtagja $x_1^6(x_1x_2)^3 = x_1^9x_2^3$ (a tétel miatt).

2. A szimmetrikus polinomok alaptétele

Szimmetrikus polinomok.

Definíció
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *szimmetrikus polinom*, ha nem változik meg semelyik két változó cseréjekor.

Példák
$(x_1x_2)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_2x_3)^2$ szimmetrikus. Ha $x_1 \longleftrightarrow x_2$: az első tag marad, a másik kettő cserélődik. Hasonlóan $x_1 \longleftrightarrow x_3$ és $x_2 \longleftrightarrow x_3$ sem változtatja meg. $x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2$ *nem* szimmetrikus. Például $x_1 \longleftrightarrow x_2$: $x_2x_1^2 + x_1x_3^2 + x_3x_2^2$ lesz. Ebben például $x_1x_2^2$ nem szerepel: nem azonos az eredetivel.

Az elemi szimmetrikus polinomok szimmetrikusak. A hatványösszeg: $x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$ szimmetrikus polinom.

Az általános négyzetösszeg.

Állítás
$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, ahol $\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ és $\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + \ldots + x_{n-1}x_n$.

Bizonyítás
Mint $n = 3$-ra, $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ négyzetre emelésével.

A szimmetrikus polinomok alaptétele
Minden szimmetrikus polinom egyértelműen kifejezhető az elemi szimmetrikus polinomok segítségével.

Bizonyítás: Kiss-jegyzet, 2.7.3. Tétel.

Eljárás szimmetrikus polinomokkal való felírásra.

Eljárás
Legyen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ főtagja $rx_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$.
Vonjuk ki f-ből $r\sigma_1^{m_1-m_2}\sigma_2^{m_2-m_3}\ldots\sigma_{n-1}^{m_{n-1}-m_n}\sigma_n^{m_n}$-et. Ekkor az eredeti főtag kiesik.
Ismételjük, amíg f el nem fogy.

Példa
Legyen $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$. A főtag $x_1^3x_2^0$, $m_1 = 3$, $m_2 = 0$.
Ki kell vonni $\sigma_1^{3-0}\sigma_2^0$-t, azaz $(x_1 + x_2)^3$-t.
$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$. Kivonva
$f(x_1, x_2) - (x_1 + x_2)^3 = -3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2$. Főtag: $-3x_1^2x_2$.
Ki kell vonni $-3\sigma_1^{2-1}\sigma_2^1$-t, azaz $-3(x_1 + x_2)x_1x_2$-t.
Az eredmény már *nulla*. Az eljárás véget ért.
Végeredmény: $x_1^3 + x_2^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$.

Az eljárás helyessége.

Állítás (Kiss-jegyzet, 2.7.4. Gyakorlat)
$\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\ldots\sigma_n^{k_n}$ főtagja $x_1^{k_1+\ldots+k_n}x_2^{k_2+\ldots+k_n}\ldots x_{n-1}^{k_{n-1}+k_n}x_n^{k_n}$.

Ha ez utóbbi $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$, akkor
$k_1 = m_1 - m_2, k_2 = m_2 - m_3, \ldots, k_{n-1} = m_{n-1} - m_n, k_n = m_n$.

Állítás (Kiss-jegyzet, 2.7.5. Gyakorlat)
Legyen az f szimmetrikus polinom főtagja $rx_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$.

(1) Ekkor $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n$.

(2) Az f minden tagjában minden kitevő legfeljebb m_1.

(1) garantálja, hogy az eljárás végrehajtható ($m_j - m_{j+1} \geq 0$).
(2) garantálja, hogy véges sok lépésben véget ér.

A hatványösszegek előállítása.

Állítás (Kiss-jegyzet, 2.7.8. Tétel)
Legyen $s_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$.
$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} - + \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}s_{k-n+1} + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0$
ha $k \geq n$ (összesen $n+1$ tag),
$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} - + \ldots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0$
ha $k \leq n$ (összesen $k+1$ tag).
Ezek a *Newton–Girard-formulák*.

Példa az alkalmazásukra
Ha $k = 2 \leq n$: $s_2 - \sigma_1 s_1 + 2\sigma_2 = 0$. Innen $s_2 = \sigma_1 s_1 - 2\sigma_2$.
De $s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sigma_1$. Így $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.
Ha $k = 3 \leq n$: $s_3 - \sigma_1 s_2 + \sigma_2 s_1 - 3\sigma_3 = 0$. Innen
$s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3 =$
$= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$. És így tovább, $s_4, s_5, \ldots$ is megkapható.

A bizonyítás ötlete.

Speciális eset:
Tekintsük az $n = 2$ és $k = 3$ esetet.
$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2$.
A bal oldalnak gyöke az x_1 és az x_2 is, ezért

(1) $x_1^2 - \sigma_1 x_1 + \sigma_2 = 0$ és

(2) $x_2^2 - \sigma_1 x_2 + \sigma_2 = 0$.

Az (1)-et x_1-gyel, a (2)-t x_2-vel szorozva, és összeadva:
$(x_1^3 + x_2^3) - \sigma_1(x_1^2 + x_2^2) + \sigma_2(x_1 + x_2) = 0$. Azaz
$s_3 - \sigma_1 s_2 + \sigma_2 s_1 = 0$.
Így általában is kijön az első Newton-Girard formula. A második formulát (amikor $k < n$), nehezebb bizonyítani.

Lásd Kiss-jegyzet, 2.7. szakasz.