# 1. Interpoláció

**Az interpoláció alapproblémája.**

**Feladat**
Olyan polinomot keresünk, amely *előre megadott helyeken előre megadott értékeket* vesz fel. A *helyek*: páronként különböző $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok. Az *értékek*: tetszőleges $b_1, b_2, \ldots, b_n$ számok. Azt szeretnénk: $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_n) = b_n$.

**Az interpoláció tétele**
Mindig pontosan egy ilyen $f$ polinom van a legfeljebb $n-1$-edfokú polinomok között (a nullapolinomot is ideértve).

**Egyértelműség**
Ha $f$ és $g$ ilyen polinomok, akkor $n$ helyen megegyeznek, így a polinomok azonossági tétele miatt egyenlők.

**Az interpolációs polinom létezése.**

**Lagrange-interpoláció (Kiss-jegyzet, 2.4.12. Gyakorlat)**
Keressünk először ilyet: $\ell_1(a_1) = 1$, $\ell_1(a_2) = 0, \ldots, \ell_1(a_n) = 0$. Az $\ell_1$ polinomnak tehát $a_2, \ldots, a_n$ gyöke. Ezért legyen $\ell_1(x) = c(x-a_2)\ldots(x-a_n)$, ahol $c \in \mathbb{C}$. A $c$ értékét az $a_1$ behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$\ell_1(x) = \frac{(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)}.$$

Analóg módon létezik $\ell_j(x)$ minden $2 \leq j \leq n$-re, melyre $\ell_j(a_j) = 1$, és a többi $a_k$ gyöke $\ell_j$-nek (ha $k \neq j$). *Jó lesz:* $f(x) = b_1\ell_1(x) + b_2\ell_2(x) + \ldots + b_n\ell_n(x)$. Például $f(a_1) = b_1\ell_1(a_1) + b_2\ell_2(a_1) + \ldots + b_n\ell_n(a_1) =$
$= b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 + \ldots + b_n \cdot 0 = b_1$. Hasonlóan látható, hogy $f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_n) = b_n$.

**Newton-interpoláció.**

**A Lagrange-interpoláció hátránya**
Képzeljük, hogy a $b_1, \ldots, b_n$ számok *mérési eredmények*. Kiszámítjuk a Lagrange-féle interpolációs polinomot: $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_n) = b_n$. Keletkezik egy új mérési eredmény: az $a_{n+1}$ helyen $b_{n+1}$. Ekkor sajnos előlről kell kezdeni a számolást. A megoldás: a *Newton-interpoláció*. Az $a_1, \ldots, a_n$ helyeken megfelelő $f$ polinomhoz egy

$$g(x) = c(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

alakú korrekciós tagot adunk hozzá. Ez nem rontja el az $a_1, \ldots, a_n$ helyeken felvett értékeket. A $c$-t úgy választjuk, hogy az $f+g$ az $a_{n+1}$ helyen is jó legyen. A részleteket lásd: Kiss-jegyzet, 2.4.13. Gyakorlat.

## 2. A gyökök és együtthatók összefüggése

**A gyöktényezős alak beszorzása.**

**Az algebra alaptételének következménye**
Minden $n$-edfokú komplex együtthatós $f$ polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol $c$ az $f$ főegyütthatója. Ez az $f$ polinom *gyöktényezős alakja*.

**Példa**
Ha $n = 2$, akkor $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x-b_1)(x-b_2)$.
De $(x-b_1)(x-b_2) = x^2 - (b_1+b_2)x + b_1b_2$.
Tehát $f(x) = a_2(x-b_1)(x-b_2) = a_2x^2 - a_2(b_1+b_2)x + a_2b_1b_2$.
Ezért $-a_2(b_1+b_2) = a_1$ és $a_2b_1b_2 = a_0$.
Innen $b_1 + b_2 = -a_1/a_2$ és $b_1b_2 = a_0/a_2$.
Ez a *gyökök és együtthatók összefüggése*, ha $n = 2$.

Két polinom akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatóik rendre megegyeznek.

**A harmadfokú polinomok esete.**

**Példa**
$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$.
Mi lesz $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$ beszorzott alakja? Mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.
Ha mindhárom zárójelből az $x$-et vesszük ki: $x^3$.
Ha két zárójelből veszünk ki $x$-et, akkor 3 tag keletkezik: $-b_1x^2 - b_2x^2 - b_3x^2$.
Ha egy zárójelből veszünk ki $x$-et, akkor is 3 tag keletkezik: $b_1b_2x + b_1b_3x + b_2b_3x$.
Végül ha egyik zárójelből sem az $x$-et vesszük ki: $-b_1b_2b_3$.
$x^3 - (b_1+b_2+b_3)x^2 + (b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)x - b_1b_2b_3$.
*A gyökök és együtthatók összefüggése*: $b_1 + b_2 + b_3 = -a_2/a_3$,
$b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = a_1/a_3, \quad b_1b_2b_3 = -a_0/a_3$.

**A négyzetösszeg.**

**Feladat**
Állapítsuk meg az $5x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ polinom komplex gyökeinek a négyzetösszegét.

**Megoldás**
$(b_1+b_2+b_3)(b_1+b_2+b_3) = ?$ Az első zárójelből minden tagot megszorzunk a második zárójelbeli minden taggal. $b_1^2$, $b_2^2$, $b_3^2$ *egyszer*, $b_1b_2$, $b_1b_3$, $b_2b_3$ mind *kétszer* keletkezik. Például $b_2b_3$ úgy is, mint $b_3b_2$. Az eredmény:
$(b_1+b_2+b_3)^2 = (b_1^2+b_2^2+b_3^2) + 2(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)$.
$(b_1^2+b_2^2+b_3^2) = (b_1+b_2+b_3)^2 - 2(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3)$.
$b_1+b_2+b_3 = -a_2/a_3 = -(-2)/5$.
$b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3 = a_1/a_3 = 3/5$.
$b_1^2+b_2^2+b_3^2 = (2/5)^2 - 2(3/5) = -26/25$.

**Az általános eset.**

**Állítás**
$(x - b_1) \dots (x - b_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - + \dots + (-1)^n \sigma_n$ :
$\sigma_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_n$
$\sigma_2 = b_1 b_2 + \dots + b_1 b_n + b_2 b_3 + \dots + b_{n-1} b_n$, és így tovább,
$\sigma_n = b_1 b_2 \dots b_n$.
$\sigma_k$ úgy keletkezik, hogy $k$ darab különböző $b_i$-t összeszorzunk az összes lehetséges módon, és az $\binom{n}{k}$ szorzatot összeadjuk.

**Bizonyítás**
Beszorzáskor mindegyik zárójelből egy-egy tagot kiveszünk, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk. $x^{n-k}$-s tag úgy keletkezik, hogy $n - k$ zárójelből $x$-et, a többi $k$ zárójelből valamelyik $-b_j$-t vesszük ki. Ezért $x^{n-k}$ együtthatója $(-1)^k \sigma_k$ lesz. □

**A gyökök és együtthatók összefüggése.**

**Definíció**
$\sigma_k(b_1, \dots, b_n)$: az összes lehetséges módon összeszorzunk $k$ különbözőt $b_1, \dots, b_n$ közül, az $\binom{n}{k}$ szorzatot összeadjuk. (Megállapodás: $\sigma_0 = 1$ és $\sigma_k = 0$ ha $k > n$.) Elnevezés: *elemi szimmetrikus polinom*. Többhatározatlanú polinomok: lásd később.

**Tétel (Kiss-jegyzet, 2.5.9. Következmény)**
Legyen $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = a_n (x - b_1) \dots (x - b_n)$. Ekkor $0 \le k \le n$ esetén $a_k = a_n (-1)^{n-k} \sigma_{n-k}(b_1, \dots, b_n)$, így

$$\sigma_k(b_1, \dots, b_n) = (-1)^k a_{n-k} / a_n \,.$$

Ez a *gyökök és együtthatók összefüggése*.

Az $(x - b_1) \dots (x - b_n)$ beszorzott alakjából következik.

# 3. Többhatározatlanú polinomok

**A többhatározatlanú polinom szemléletes fogalma.**

**Meta-definíció**
*Többhatározatlanú polinomnak* nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az $x_1, x_2, \dots, x_n$ *határozatlanokból* (változókból) készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével.

**Példa**
$(x_1 + i x_2)(2x_2 - x_1^3)$ egy kéthatározatlanú polinom. A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk. Az eredmény: $2x_1 x_2 - x_1^4 + 2i x_2^2 - i x_1^3 x_2$.

**Definíció-kísérlet**
$\sum r_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$, ahol $r_{m_1, m_2, \dots, m_n} \in \mathbb{C}$.

Kényelmesebb a következő:

**A többhatározatlanú polinom definíciója.**

$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1^4 + 2ix_2^2 - ix_1^3x_2$. Rendezzük $x_2$ szerint:
$(2i)x_2^2 + (2x_1 - ix_1^3)x_2 - x_1^4$. Ez $x_2$-nek másodfokú polinomja, ahol *az együtthatók $x_1$-nek polinomjai*.

**Definíció**
Az $x_1$ és $x_2$ határozatlanok polinomjának nevezzük az
$f(x) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_mx_2^m$ formális kifejezéseket, ahol $m \geq 0$ egész, és $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{C}[x_1]$ az $x_1$ polinomjai.
Általában az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ polinomjai az $f(x) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_mx_n^m$ formális kifejezések, ahol $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$ (*rekurzív definíció*).
Ezek halmazát $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jelöli.
Példák: $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{C}[y_1, y_2]$, sőt, $y_1^2 + y_2^3 \in \mathbb{Z}[y_1, y_2]$, mert minden együttható egész.
Ugyanígy $z_1 - \pi z_2^2z_3 \in \mathbb{R}[z_1, z_2, z_3]$.

**Összeadás, kivonás, szorzás.**

Az $n$-határozatlanú polinomok összegét, különbségét, szorzatát *ugyanúgy definiáljuk, mint az egyhatározatlanúakét*, de most az együtthatók $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ elemei.

**Definíció**

$$f = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_mx_n^m$$
$$g = b_0 + b_1x_n + b_2x_n^2 + \ldots + b_mx_n^m \, .$$

E polinomok összege és különbsége:

$$(f + g) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_n + \ldots + (a_m + b_m)x_n^m$$
$$(f - g) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x_n + \ldots + (a_m - b_m)x_n^m \, .$$

**Definíció**
$(a_0 + a_1x_n + \ldots + a_mx_n^m)(b_0 + b_1x_n + \ldots + b_\ell x_n^\ell)$-ben
$x_n^k$ együtthatója legyen $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0$.

**Nullosztómentesség.**

A többhatározatlanú polinomok számolási szabályai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) ugyanazok, mint az egyhatározatlanú esetben.

**Tétel**
$\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *nullosztómentes*: $fg = 0$ csak akkor teljesül, ha $f = 0$ vagy $g = 0$.

**Bizonyítás (vázlat)**
$n$ szerinti teljes indukcióval. $n = 1$-re tudjuk. Ha $f \neq 0 \neq g$:
$f = a_0 + \ldots + a_mx_n^m$ $(a_k \neq 0)$, $\quad g = b_0 + \ldots + b_\ell x_n^\ell$ $(b_\ell \neq 0)$.
Itt $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_\ell \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$. $fg = a_mb_\ell x_n^{m+\ell} + \ldots$ (ahogy az egyváltozós esetben). Az indukciós feltevés miatt $a_mb_\ell \neq 0$, így $fg \neq 0$. $\square$

**Fokszám.**

**Definíció**
Legyen $f(x_1,\dots,x_n)=\sum r_{m_1,m_2,\dots,m_n}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$. Az $r_{m_1,m_2,\dots,m_n}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ tag *foka* $m_1+\dots+m_n$. Az $f$ *foka* a nem nulla tagok fokai közül a legnagyobb.
Jelölés: $\mathrm{gr}(f)$.

**Példa**
$f(x_1,x_2)=2x_1x_2-x_1^4+2ix_2^2-ix_1^3x_2$ foka 4: $\mathrm{gr}(x_1^4)=4=\mathrm{gr}(x_1^3x_2)$, de $\mathrm{gr}(x_1x_2)=2=\mathrm{gr}(x_2^2)$.

**Definíció**
Egy polinom *homogén $k$-adfokú*, ha minden tagjának foka $k$.

Minden polinom egyértelműen előáll homogén polinomok összegeként.

**Szorzat foka.**

**Tétel**
Szorzásnál a fokok összeadódnak: $\mathrm{gr}(fg)=\mathrm{gr}(f)+\mathrm{gr}(g)$.

**Bizonyítás**
Lásd Kiss-jegyzet, 2.6.3. Gyakorlat.

**Házi feladat**
Egy $f\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ polinomnak pontosan akkor van reciproka a $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ polinomjai között, ha nem nulla konstans (azaz foka nulla).

Lásd Kiss-jegyzet, 2.6.2. Állítás.