1. Polinomfüggvények

Behelyettesés polinomba.

Definíció
Legyen b komplex szám. Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ polinom *b helyen felvett helyettesítési értéke* $f^*(b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_nb^n$ (az x helyére b-t írunk). Az f-hez tartozó *f^* polinomfüggvény* az az $f^* : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ függvény, mely minden $b \in \mathbb{C}$-hez $f^*(b)$-t rendel.

Állítás
Ha $f, g \in \mathbb{C}[x]$ és $b \in \mathbb{C}$, akkor $(f + g)^*(b) = f^*(b) + g^*(b)$
és $(fg)^*(b) = f^*(b)g^*(\mathrm{b})$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.2. Gyakorlat)
A polinomok összeadását és szorzását pontosan azzal a motivációval definiáltuk, hogy ez az állítás igaz legyen.

Példa behelyettesítésre.

Példa
Legyen $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 2$ és $b = 2$. Ekkor $f^*(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 + 2 = 68$.
Kevesebb szorzás kell, ha $f(x) = \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2$. Belülről kifelé:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \Big(3x^3 + 2x^2 + 1\Big)x + 2 = \\
&= \Big(\big(3x^2 + 2x\big)x + 1\Big)x + 2 = \\
&= \Big(\big(3x^2 + 2x + 0\big)x + 1\Big)x + 2 = \\
&= \Big(\big((3x + 2)x + 0\big)x + 1\Big)x + 2.
\end{aligned}$$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
f együtthatói	3	2	0	1	2
$b = 2$	3	8	16	33	68

Lemásoljuk a főegyütthatót. Balról indulva az utoljára kitöltött mezőben talált értéket megszorozzuk $b = 2$-vel, hozzáadjuk a következő, üres mező fölött található együtthatót, és az eredményt beírjuk ebbe az üres mezőbe.
$3 \cdot 2 + 2 = 8$
$8 \cdot 2 + 0 = 16$
$16 \cdot 2 + 1 = 33$
$33 \cdot 2 + 2 = 68$

A Horner elrendezés.

(1) A táblázat felső sorába balról jobbra beírjuk sorban a polinom együtthatóit, a főtagtól a konstans tagig. (A polinomban nem kiírt nulla együtthatókat is!)

(2) Az alsó sor elejére odaírjuk a behelyettesítendő b értéket. Bemásoljuk a főegyütthatót, a főegyüttható alá.

(3) Az utoljára kitöltött mezőbeli értéket megszorozzuk b-vel, hozzáadjuk a mellette jobbra lévő üres mező fölötti együtthatót, és ezt beírjuk ebbe az üres mezőbe.

(4) Az $f^*(b)$ értékét az alsó sor végéről olvashatjuk le.

$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0.$

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
b	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	$c_j b + a_j =$	$\ldots$	c_0	$c_0 b + a_0 =$
	c_{n-1}	$\ldots$	c_j	$= c_{j-1}$	$\ldots$	c_0	$= f^*(b)$

A Horner-tétel bizonyítása.

Legyen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_{j+1}x^{j+1} + a_j x^j + \ldots + a_1 x + a_0$,

	a_n	$\ldots$	a_{j+1}	a_j	$\ldots$	a_1	a_0
	$c_{n-1} = a_n$	$\ldots$	c_j	c_{j-1}	$\ldots$	c_0	B

$$c_{j-1} = bc_j + a_j$$
$$B = bc_0 + a_0$$

és $q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0$.
Állítás: $B = f^*(b)$ és $f(x) = (x-b)q(x) + f^*(b)$.

Bizonyítás (Kiss-jegyzet, 2.4.4. Gyakorlat)
Beszorzással, és x hatványai szerint rendezve:

$$(x-b)(c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_j x^j + c_{j-1}x^{j-1} + \ldots + c_1 x + c_0) + B =$$
$$= c_{n-1}x^n + \ldots + (c_{j-1} - bc_j)x^j + \ldots + (c_0 - bc_1)x - bc_0 + B\,.$$

Itt $c_{n-1} = a_n$, $\quad c_{j-1} - bc_j = a_j$ ha $1 \leq j < n$, $\quad -bc_0 + B = a_0$.
Tehát ez $f(x)$, azaz $f(x) = (x-b)q(x) + B$. A b-t behelyettesítve $f^*(b) = B$ (hiszen $x - b$ nullává válik).

2. Polinomok gyökei

A gyök és a gyöktényező.

Definíció
A b szám *gyöke* az f polinomnak, ha $f^*(b) = 0$ ($f \in \mathbb{C}[x]$, $b \in \mathbb{C}$).

Állítás (a gyöktényező kiemelhetősége)
A b szám akkor és csak akkor gyöke az f polinomnak, ha van olyan q polinom, hogy $f(x) = (x-b)q(x)$.

Bizonyítás
Ha $f(x) = (x-b)q(x)$, akkor $f^*(b) = (b-b)g^*(b) = 0$.
Megfordítva, ha $f^*(b) = 0$, akkor a Horner-elrendezésből kapott q polinomra $f(x) = (x-b)q(x) + 0$.

Az $x - b$ a b gyökhöz tartozó *gyöktényező*.

Több gyöktényező kiemelése.

Tétel (Kiss-jegyzet, 2.4.7. Tétel)
Minden $0 \neq f \in \mathbb{C}[x]$ fölírható $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k) q(x)$ alakban, ahol a (nem feltétlenül különböző) $b_1, \ldots, b_k$ számok az f-nek az *összes* $\mathbb{C}$-beli gyökei, és q-nak nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás
Ha f-nek nincs gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $f(x) = q(x)$ és $k = 0$ jó.
Ha van, akkor $f(x) = (x - b_1)q_1(x)$ (a gyöktényező kiemelhető). Ha q_1-nek van egy b_2 gyöke, akkor $q_1(x) = (x - b_2)q_2(x)$. Stb. Végül $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke.
Belátjuk, hogy f-nek nincs más gyöke, mint $b_1, \ldots, b_k$. Valóban, ha $f^*(b) = 0$, akkor $(b - b_1) \ldots (b - b_k)q^*(b) = 0$. A nullosztómentesség miatt valamelyik tényező nulla. De $q^*(b) \neq 0$, ezért $b - b_j = 0$ valamelyik j-re. Azaz $b = b_j$.

Üres szorzat!

A gyökök száma.

Kérdés
Miért ér véget az előző bizonyításban az eljárás?

Ha $f(x) = (x - b_1) \ldots (x - b_k)q(x)$, akkor
$\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(x - b_1) + \ldots + \mathrm{gr}(x - b_k) + \mathrm{gr}(q) = k + \mathrm{gr}(q)$ (hiszen szorzásnál a fokok összeadódnak). Így $k \leq \mathrm{gr}(f)$.

Következmény
Minden polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

Házi feladat
Mutassuk meg, hogy egy n-edfokú polinom minden értéket legfeljebb n helyen vehet föl.

A polinomok azonossági tétele.

A polinomok azonossági tétele
Ha két, legfeljebb n-edfokú polinom több mint n helyen megegyezik, akkor *egyenlők* (együtthatóik megegyeznek).

Bizonyítás
Ha f és g megegyezik a c helyen, azaz $f^*(c) = g^*(c)$, akkor $(f - g)^*(c) = 0$. Tehát $f - g$-nek több, mint n gyöke van. De foka (ha van), legfeljebb n lehet. Ez ellentmond annak, hogy egy nem nulla polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka, kivéve, ha $f - g = 0$, azaz $f = g$.

Következmény
Ha az f^* és g^* polinomfüggvények egyenlők, akkor $f = g$. Vagyis $\mathbb{C}$ fölött $f \mapsto f^*$ kölcsönösen egyértelmű.

3. A gyöktényezős alak

Az algebra alaptétele.

Az algebra alaptétele
Minden nem konstans, komplex együtthatós polinomnak *van* gyöke a komplex számok között.

Bizonyítás: egyelőre nincs
A tétel bizonyításához az *analízis* eszközei szükségesek. Harmadéven: bizonyítás Komplex függvénytan segítségével. Másodéven: bizonyítás Galois-elmélet segítségével. Felhasznált segédtétel:

Tétel
Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

Ez bizonyítható az elemi analízis Bolzano-tételével, de következik az algebra alaptételéből is.

A gyöktényezős alak.

Következmény (Kiss-jegyzet, 2.5.1. Gyakorlat)
Minden n-edfokú komplex együtthatós f polinom fölírható $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ alakban, ahol c az f főegyütthatója. Ez az f polinom *gyöktényezős alakja*.

Bizonyítás
Láttuk: $f(x) = (x-b_1)\dots(x-b_k)q(x)$, ahol q-nak nincs gyöke. Az algebra alaptétele miatt $q = c$ konstans polinom. De $c \neq 0$, mert akkor $f = 0$ lenne, és nem lenne foka. Láttuk: $\mathrm{gr}(f) = k + \mathrm{gr}(q)$, de $\mathrm{gr}(q) = 0$, ezért $k = n$. A $c(x-b_1)\dots(x-b_n)$ szorzatban x^n együtthatója c.

Példa
$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = \big(x-1\big)\big(x-(-1)\big)\big(x-i\big)\big(x-(-i)\big)$.

Példák gyöktényezős alakra.

Állítás
$x^n - 1 = (x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\dots(x-\varepsilon_n)$, ahol $\varepsilon_k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ az n-edik egységgyökök.

Bizonyítás
Mivel $\varepsilon_k^n = 1$, ezért mindegyik ε_k gyöke x^n-1-nek. Ezért mindegyik $x-\varepsilon_k$ szerepel x^n-1 gyöktényezős alakjában. De x^n-1 foka n, és így legfeljebb n gyöke lehet. Az $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ páronként különböző, így ez az összes gyök. Az x^n-1 főegyütthatója 1, ezért $c = 1$-gyel kell szorozni.

Házi feladat
$x^4 + 4 = \big((x-(1+i)\big)\big((x-(-1+i)\big)\big((x-(-1-i)\big)\big((x-(1-i)\big)$.

Gyök multiplicitása.

Példa
$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$.

Általában:
$f(x) = c(x-d_1)^{k_1}(x-d_2)^{k_2}\dots(x-d_m)^{k_m}$, ahol a $d_1,\dots,d_m$ már *páronként különbözők.*

Definíció
A k_i a d_i gyök *multiplicitása*. Azaz d_i egy *k_i-szoros gyök.*

Következmény
$\mathrm{gr}(f) = k_1+k_2+\ldots+k_n$, azaz egy n-edfokú polinomnak multiplicitásokkal számolva n darab gyöke van.

Többszörös gyökök.

Példa
$f(x) = x^3-3x-2 = (x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2)$. Legyen $g(x) = x-2$. Ekkor $g(-1) \neq 0$.

Ezentúl $f^*(b)$ helyett $f(b)$ (de polinom $\neq$ polinomfüggvény).

Pontosabb definíció
Az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak a $b \in \mathbb{C}$ szám *k-szoros gyöke* (vagyis a b gyök *multiplicitása* k), ha $f(x) = (x-b)^k q(x)$, ahol a $q \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak b már nem gyöke.

Megjegyzés
A többszörös gyökök kényelmesen meghatározhatók a *formális deriválás* módszerével (Kiss-jegyzet, 3.6. szakasz). Ez csak emelt szinten szerepel ebben a félévben.

4. A gyökök meghatározása

A racionális gyökteszt.

A racionális gyökteszt (Kiss-jegyzet, 3.3.9. Tétel)
$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ egész együtthatós polinom. *Ha* a p/q nem egyszerűsíthető tört gyöke f-nek, *akkor* $p \mid a_0$ (a számláló osztja f konstans tagját), és $q \mid a_n$ (a nevező osztja f főegyütthatóját).

Bizonyítás
$0 = f(p/q) = a_0 + a_1(p/q) + \ldots + a_{n-1}(p/q)^{n-1} + a_n(p/q)^n$.
q^n-nel szorozva $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0$.
Mindegyik tag osztható p-vel, kivéve esetleg a legelsőt. Mivel $p \mid 0$, ezért a legelső tag is: $p \mid a_0q^n$. A p/q nem egyszerűsíthető, így p és q relatív prímek. Tehát $p \mid a_0q^n$-ből $p \mid a_0$ következik. Ugyanezzel a módszerrel kapjuk a $q \mid a_n$ oszthatóságot is.

Példa a racionális gyöktesztre.

Példa
Határozzuk meg $f(x) = 4x^4 + 5x^2 + 4x^3 + 4x + 1$ gyökeit.

Megoldás
Ha a p/q egyszerűsíthetetlen tört gyök, akkor $p \mid 1$ és $q \mid 4$. Ezért $p = \pm 1$ és $q = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Így $p/q = \pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4$. Ezeket *végigpróbálgatva* kapjuk, hogy *csak* $-1/2$ jó.
Hornerrel leosztva $f(x) = \big(x + (1/2)\big)(4x^3 + 2x^2 + 4x + 2)$. Itt $4x^2 + 2x^2 + 4x + 2$-nek *csak* $-1/2$ lehet racionális gyöke. Ez tényleg gyök: $f(x) = \big(x + (1/2)\big)^2(4x^2 + 4)$. Itt $4x^2 + 4 = 4(x^2 + 1) = 4(x + i)(x - i)$.
Tehát f gyökei: $-1/2$ (kétszeres), i és $-i$.
Gyöktényezős alakja $f(x) = 4\big(x + (1/2)\big)^2(x + i)(x - i)$.
Azaz $f(x) = (2x + 1)^2(x + i)(x - i)$.