1. A polinom fogalma

Számolás formális kifejezésekkel.

Feladat
Oldjuk meg az $\dfrac{x^2+x+1}{x+1} = x$ egyenletet.

Megoldás
$x+1$-gyel átszorozva $x^2+x+1 = x^2+x$. Innen $1 = 0$. Ez ellentmondás, így az egyenletnek nincs megoldása.

Megjegyzés
Tehát semmilyen x számra nem igazak a fenti egyenlőségek. Mégis helyesnek éreztük a fenti átalakítást. *Formálisan* számoltunk az x-et tartalmazó kifejezésekkel, korábban megtanult átalakítási szabályok szerint.

A polinom szemléletes fogalma.

Meta-definíció
Polinomnak nevezünk egy olyan formális kifejezést, amely (komplex) számokból, és az x betűből készül ismételt összeadás, kivonás és szorzás segítségével. Az x neve *határozatlan* (vagy *változó*).

Példa
$\big((ix-x^2)(x-\ 23)+2x-7\big)^2+43x^3-8$ egy polinom.

A zárójeleket a disztributivitás segítségével felbonthatjuk, majd x hatványai szerint rendezhetünk. Az eredmény: $x^6-(46+2i)x^5+(524+92i)x^4+(195-1054i)x^3-$ $-(847+106i)x^2-(28-322i)x+41$. (`MAPLE` program!)

A polinom definíciója.

Kényelmes definíció
Egyhatározatlanú polinomnak nevezzük az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ formális kifejezéseket, ahol $n \geq 0$ egész szám és $a_0, \ldots, a_n$ komplex számok. Az x neve *határozatlan*. Az a_jx^j a polinom egy *tagja*, az x^j *együtthatója* a_j. Az $a_0 = a_0x^0$ a *konstans tag*.

Fontos!
Két polinom akkor *egyenlő*, ha együtthatóik megegyeznek (x^j együtthatója ugyanaz a két polinomban minden $j \geq 0$-ra).

$x^2-1 = 0\cdot x^3+1\cdot x^2+0\cdot x+(-1)$ és $x^3-1 = 1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+(-1)$ nem egyenlők, mert például az x^3 együtthatója más a két polinomban.

A nullapolinom.

Definíció
A *nullapolinom* az a polinom, amelynek minden együtthatója nulla. Ugyanúgy 0 jelöli, mint a 0 számot.

Minden c komplex számot polinomnak tekintünk (amelyben x^j együtthatója nulla minden $j \geq 1$ esetén, konstans tagja pedig c). Ezek a *konstans* polinomok.

$\mathbb{C}[x]$: a *komplex* együtthatós polinomok halmazának jele.
$\mathbb{R}[x]$: a *valós* együtthatós polinomok halmazának jele.
$\mathbb{Q}[x]$: a *racionális* együtthatós polinomok halmazának jele.
$\mathbb{Z}[x]$: az *egész* együtthatós polinomok halmazának jele.
A határozatlan jele más is lehet: $\mathbb{R}[y]$, $\mathbb{Z}[u]$.
Példa: $\pi y^2 + 3 \in \mathbb{R}[y]$, de $\pi y^2 + 3 \notin \mathbb{Q}[y]$.

2. Műveletek polinomok között

Polinomok kibővítése nulla tagokkal.

A nulla együtthatójú tagokat igény szerint írjuk ki:

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \cdot x^{n+1} + 0 \cdot x^{n+2} + \ldots . \end{aligned}$$

Megállapodunk abban, hogy $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$. Így bármely két polinomot ugyanannyi taggal írhatunk fel:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n . \end{aligned}$$

Példa

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + 1 \\ x^3 + 1 &= 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 . \end{aligned}$$

Polinomok összege, különbsége, ellentettje.

Definíció
Legyen

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n . \end{aligned}$$

E polinomok összege és különbsége:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n \\ (f-g)(x) &= (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_n)x^n . \end{aligned}$$

Definíció
Az $f \in \mathbb{C}[x]$ *ellentettje* h, ha $f + h = 0$. Az ellentett jele $h = -f$.
Az $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (egyetlen) ellentettje
$h(x) = (-f)(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.
A kivonás az ellentett hozzáadása: $g - f = g + (-f)$.

Példa polinomok szorzatára.

Kérdés
Hogyan definiáljuk az $(a_0 + a_1x)(b_0 + b_1x + b_2x^2)$ szorzatot? Például mi legyen x^2 együtthatója?

Állítás (Kiss-jegyzet, 2.1.4. Gyakorlat)
Az $(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)(v_1 + \ldots + v_m)$ eredménye az nm darab u_jv_ℓ tag összege ($1 \le j \le n$ és $1 \le \ell \le m$). A két zárójelből kiveszünk egy-egy tagot az összes lehetséges módon, ezeket összeszorozzuk, a szorzatokat összeadjuk.

x^2-es tag kétféleképpen keletkezhet: $a_0(b_2x^2)$ és $(a_1x)(b_1x)$. Ezért x^2 együtthatója $a_0b_2 + a_1b_1$. A végeredmény: $a_1b_2x^3 + (a_0b_2 + a_1b_1)x^2 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_0b_0$.

Polinomok szorzatának definíciója.

Definíció
$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$-ben
x^k együtthatója legyen $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0$.

Magyarázat
x^k-os tag akkor keletkezik $(a_jx^j)(b_\ell x^\ell)$-ből, ha $j + \ell = k$.

Példa
Az x^{n+m} együtthatója

$$a_0b_{n+m} + \ldots + a_{n-1}b_{m+1} + a_nb_m + a_{n+1}b_{m-1} + \ldots + a_{n+m}b_0\,.$$

Tudjuk, hogy $\ell > m$ esetén $b_\ell = 0$. Így az első n tag nulla. Tudjuk, hogy $j > n$ esetén $a_j = 0$. Így az utolsó m tag nulla. Vagyis x^{n+m} együtthatója a_nb_m.

3. Polinomok foka

Polinom foka.

Definíció
Ha $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, ahol $a_n \ne 0$, akkor f *foka* n. Jele: $\mathrm{gr}(f)$. Tehát a fok a legnagyobb olyan kitevő, amelyhez tartozó együttható nem nulla. *A nullapolinomnak nincs foka.* Az $f(x)$ k-adfokú tagja a_kx^k, *főtagja* a_nx^n, *főegyütthatója* a_n. Az $f(x)$ *normált polinom*, ha főegyütthatója 1.

Tétel
Szorzásnál a fokok összeadódnak: $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$.

Bizonyítás
$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ és $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ esetén láttuk, hogy x^{n+m} együtthatója a_nb_m. Ez nem nulla, ha a_n és b_m nem nulla. Magasabb fokú tag nem keletkezik. □

A szorzat foka: következmények.

Következmények

(1) A polinomok szorzása *nullosztómentes*.

(2) Egy f polinomnak pontosan akkor van *reciproka* polinomok között, ha nem nulla konstans polinom.

Bizonyítás
(1): Láttuk, hogy ha f és g nem nulla, akkor fg-nek van nem nulla együtthatója, így fg sem nulla.
(2): Ha $fg = 1$, akkor $0 = \mathrm{gr}(1) = \mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}(f) + \mathrm{gr}(g)$. Ezért $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) = 0$, azaz mindkettő nem nulla konstans.
Megfordítva, ha $c \neq 0$ konstans, akkor reciproka, azaz $1/c$ is (konstans) polinom.

Házi feladat: Igazoljuk, hogy fg konstans tagja f és g konstans tagjainak szorzata.

Összeg foka.

Tétel
Két polinom összegének a foka legfeljebb akkora, mint a két polinom fokai közül a nem kisebb: $\mathrm{gr}(f+g) \leq \max(\mathrm{gr}(f), \mathrm{gr}(g))$. Ha a két polinom foka különböző, akkor egyenlőség áll.

Példa
$2 = \mathrm{gr}(x^2+1) = \mathrm{gr}(-x^2+x) > \mathrm{gr}\big((x^2+1) + (-x^2+x)\big) = 1$.

Bizonyítás
$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ és $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$, ahol feltehetjük, hogy például a_n nem nulla, azaz $\mathrm{gr}(f) = n$. Ha $b_n = 0$, akkor $\mathrm{gr}(g) < n$, és $f+g$ főegyütthatója a_n, azaz $\mathrm{gr}(f+g) = \mathrm{gr}(f) = n$. Ha $b_n \neq 0$, akkor $\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g) = n$. Ekkor $a_n + b_n = 0$ is lehet, amikor $\mathrm{gr}(f+g) < \mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(g)$.

A műveleti tulajdonságok.

Polinomokkal a „szokásos" módon számolhatunk.

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ polinomokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(f+g)+h = f+(g+h)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $f+g = g+f$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $f+0 = 0+f = f$ (az ilyen tulajdonságú elem a *nullelem*).

(4) Minden f-nek van *ellentettje*.

(5) $(fg)h = f(gh)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $fg = gf$ (a szorzás kommutatív).

(7) $f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$ (a konstans 1 polinom *egységelem*).

(8) Az f-nek akkor van reciproka, ha nem nulla konstans.

(9) $(f+g)h = fh + gh$ (*disztributivitás*).

4. A szumma és produktum jelölés

Összegek tömör alakja.

Definíció

Az $a_1+a_2+\ldots+a_n$ összeget így rövidítjük: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$. A *szumma* jel utáni kifejezéseket kell összeadni a j azon értékeire, amit a jel alatt és fölött megadunk.

Példák

$\sum\limits_{j=6}^{9} a_j^j = a_6^6 + a_7^7 + a_8^8 + a_9^9$. (A j hattól kilencig fut.)

$\sum\limits_{2<j<5} a_j + b_j = a_3 + b_3 + a_4 + b_4$.

$\sum\limits_{2<j<k<6} jk = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 47$.

$\sum\limits_{p\,<\,10\text{ prím}} p^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = 87$.

Polinomok szorzata szummás jelöléssel.

A binomiális tétel szummás alakja

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}a^{n-j}b^j$.

Állítás

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m = \sum_{\ell=0}^{m} b_\ell x^\ell$$

esetén $(fg)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_kx^k$, ahol $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j} = \sum_{j+\ell=k} a_jb_\ell$.

A produktum jelölés.

Definíció

A $\prod$ produktum jelölés hasonló a szumma jelöléshez, csak összeadás helyett szorozni kell. Példák: $\prod_{j=2}^{n} a_j = a_2a_3\ldots a_n$. $\quad \prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$.

Megállapodás

Egytagú összeg és szorzat az egyetlen tagjával egyenlő. Az *üres összeg* értéke 0. Az *üres szorzat* értéke 1.

Példa: $\sum_{j=3}^{3} b_j = b_3$, $\quad \sum_{j=3}^{2} b_j = 0$, $\quad \sum_{j=1}^{n} a_jx^j = 0$, ha $n = 0$.

Magyarázat: Kiss-jegyzet, 2.2.3. Gyakorlat.

Ezzel elvégeztük a Kiss-jegyzet 2.1. Szakaszát.