1. A determináns alaptulajdonságai

A megkívánt tulajdonságok.

Tétel
Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A skalárszoros-tartás.

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum\limits_{f\in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Skalárszoros-tartás
Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort szorozzuk λ-val.
Azaz a_{1j} helyére λa_{1j} kerül.
A fenti összegben minden tag első tényezője a_{1j} alakú alkalmas j-re, és több tényező az első sorból nincs. Ezért az új determinánsban minden tényező λ-val szorzódik. Így a teljes összeg, azaz a determináns is λ-val szorzódik. $\square$

Ugyanez lesz, ha bármelyik oszlopot vagy sort szorozzuk λ-val, mert az összeg mindegyik tagjában minden sorból és oszlopból pontosan egy tényező van.

Az összegtartás.

Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$ egy $n \times n$-es mátrix.
Ekkor $\det(M) = \sum\limits_{f\in S_n} \mathrm{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Összegtartás
Az egyszerűbb jelölés kedvéért az első sort bontsuk összegre.
Azaz a_{1j} helyére $b_{1j} + c_{1j}$ kerül. Ekkor
$a_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} = b_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} + c_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$. Így az eredeti determináns is két determináns összegére bomlik, melyekben az első sorban b_{1j}, illetve c_{1j} szerepel. □

Ugyanez történik, ha bármelyik másik oszlopot vagy sort bontjuk összegre.
HF: 3×3-asra részletezni ezt a bizonyítást.

3×3**-as felső háromszögmátrix.**

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Felső háromszögmátrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

felső háromszögmátrix, ha $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$. Ezért a fenti összeg utolsó öt tagja nulla lesz. □

Elemzés
A főátló alatti elemek azok, ahol a sorindex nagyobb, mint az oszlopindex,
azaz a_{ij}, ahol $i > j$.

A megmaradó tag az *identikus permutációhoz* tartozik.

Általános felső háromszögmátrix.

Ha a nézőtér egy sorában 1-től 20-ig számozták a székeket, akkor hányféleképpen ülhetnek le a nézők úgy, hogy mindenki legalább olyan számú széken üljön, mint ahová a jegye szól?

Csak egyféleképpen: *ha mindenki a saját helyén ül*.
Mert: Akinek a 20. székre szól a jegye, az csak ott ülhet. Akinek a 19.-re szól, az nem ülhet az 20.-on, mert az foglalt. Ezért ő a 19. széken ül. És így tovább.

Felső háromszögmátrix determinánsa
Tudjuk: $a_{ij} = 0$, ha $i > j$. Az $a_{1f(1)}a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$ mikor nem 0?
Az kell: $i \leq f(i)$ minden i-re. A fenti miatt $f = id$.
Tehát a determináns $\mathrm{sg}(id)a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$. Mivel $\mathrm{sg}(id) = 1$, ez tényleg a főátlóbeli elemek szorzata.

3×3**-as: két oszlop egyenlősége.**

$$\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -\\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

A második és a harmadik oszlop egyenlősége

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$, $a_{32} = a_{33}$. Általánosabban: $a_{i2} = a_{i3}$ mindegyik i-re. A fenti összeg tagjai kiejtik egymást, mert $a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32} = a_{12}a_{21}a_{33}$.
Az előjelezés arra való, hogy általában is minden így kiessen.

Két sor egyenlősége.

$\det(M) = \sum_{f \in S_n} \operatorname{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)}$.

Az egyszerűbb jelölés végett azt tesszük föl, hogy az i-edik és a j-edik *sor* egyenlő. Tehát $a_{ik} = a_{jk}$ minden $1 \le k \le n$ esetén.
$a_{1f(1)} \dots a_{if(i)} \dots a_{jf(j)} \dots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)}$,
mert $a_{if(i)} = a_{jf(i)}$ és $a_{jf(j)} = a_{if(j)}$.
$a_{1f(1)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{if(j)} \dots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \dots a_{if(j)} \dots a_{jf(i)} \dots a_{nf(n)}$
(megcseréltük a szorzat i-edik és j-edik tényezőjét). Az első indexek sorban vannak, a másodikak permutációja g.
Ekkor $g(i) = f(j)$, $g(j) = f(i)$ és $g(\ell) = f(\ell)$, ha $\ell \ne i, j$. Ezért $g = f \circ (i, j)$. Azaz $\operatorname{sg}(g) = \operatorname{sg}(f)\operatorname{sg}\big((i, j)\big) = -sg(f)$. Tehát a zöld és kék tagok kiejtik egymást. Láttuk: ez a megfeleltetés párokba állítja a tagokat, mert $\big(f \circ (i, j)\big) \circ (i, j) = f$. Tehát minden tag kiesik. $\square$

3×3**-as: a transzponált determinánsa.**

$$\begin{aligned} M = ((a_{ij})) &\implies a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -\\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,. \\ M^T = ((b_{ij})) &\implies b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} -\\ &\quad - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}\,. \end{aligned}$$

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ij} = a_{ji}$.
$b_{11}b_{22}b_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$.
$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{21}b_{32} = a_{31}a_{12}a_{23} = a_{12}a_{23}a_{31}$. Előjel: $+1$.
$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{31}a_{22}a_{13} = a_{13}a_{22}a_{31}$. Előjel: -1.
$b_{11}b_{23}b_{32} = a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}a_{32}$. Előjel: -1.
$b_{12}b_{21}b_{32} = a_{21}a_{12}a_{33} = a_{12}a_{21}a_{33}$. Előjel: -1. $\square$

3×3-as: a transzponáltbeli permutációk.

$b_{12}b_{23}b_{31} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ezek egymás *inverzei*.

$b_{13}b_{22}b_{31} = a_{13}a_{22}a_{31}$.

$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = g = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ezek is egymás *inverzei*.

Az összes többi tagnál is inverz permutációkat kapunk.

A transzponált determinánsa.

$M = ((a_{ij})) \implies \det(M) = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sg}(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

$M^T = ((b_{ij})) \implies \det(M^T) = \sum_{f \in S_n} \mathrm{sg}(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}$.

Transzponálásnál az indexeket meg kell cserélni: $b_{ji} = a_{ij}$.

$b_{1f(1)}b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} = a_{f(1)1}a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n}$.

Rakjuk sorba az első index szerint e szorzat tényezőit:

$a_{f(1)1}a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n} = a_{1g(1)}a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$.

A $b_{ji} = a_{ij}$ akkor szerepel a zöld szorzatban, ha $i = f(j)$. Az a_{ij} akkor szerepel a kék szorzatban, ha $g(i) = j$. A zöld és kék szorzatok tényezői ugyanazok. Ezért $i = f(j) \iff g(i) = j$. Ez azt jelenti, hogy $g = f^{-1}$.

Tehát a $\det(M^T)$-ban szereplő, $f \in S_n$-hez tartozó tag megegyezik a $\det(M)$-beli $g = f^{-1} \in S_n$-hez tartozó taggal. Mivel $\mathrm{sg}(f^{-1}) = \mathrm{sg}(f)$, ezért a két tag előjele is ugyanaz. Az $f \leftrightarrow f^{-1}$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés S_n-en. □

A tulajdonságok összefoglalása.

Ma beláttuk:
Ha T test, akkor $T^{n \times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

Állítás
Az (1) és (2) tulajdonságok, valamint az, hogy az egységmátrix determinánsa 1, a determináns értékét *egyértelműen meghatározzák*. Biz: Gauss-elimináció.

A többi tulajdonság.

Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezett determinánsra igaz:

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

Múltkor láttuk:
Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) *oszlopvektorokkal* való egyszerű számolás.
A (8) az *inverz aldeterminánsos képletéből* következik.

A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.
Irodalom: Freud-jegyzet, 1. Fejezet.