1. A komplex számok ábrázolása

Vektorok és helyvektorok.

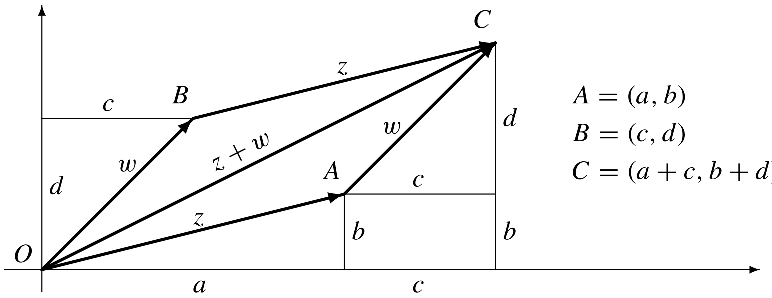
Ismétlés
A sík *vektorai* irányított szakaszok, de két vektor *egyenlő*, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolható. A sík minden pontját egyértelműen kijelöli egy ilyen $\overrightarrow{OA}$ vektor A végpontja. Ez az A pont *helyvektora*.

Jelölés
Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató vektort szintén az (a, b) számpárral adjuk meg. Tehát beszélhetünk a $z = (a, b) = \overrightarrow{OA}$ vektorról.

Vektorösszeadás.

A vektorok *összeadása* egymás után fűzéssel történik: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$.



$A = (a, b)$
$B = (c, d)$
$C = (a + c, b + d)$

Ez a *paralelogramma-szabály*, hiszen $OACB$ paralelogramma.
A $z = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = (a, b)$ és $w = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = (c, d)$ vektorok összege $z + w = \overrightarrow{OC} = (a + c, b + d)$.

A komplex számsík.

Ahogy a valós számokat a számegyenesre képzeljük, az $a + bi$ komplex számot a sík (a, b) pontjával ábrázoljuk.

Például $i = 0 + 1i$ a $(0, 1)$ pontnak felel meg.

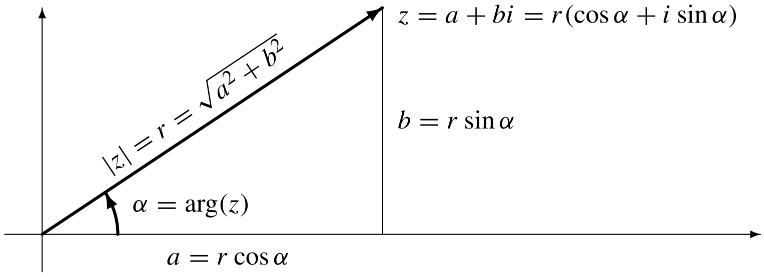
A valós számok az x-tengelyen helyezkednek el, ennek neve *valós tengely*. A tisztán képzetes számok az y-tengelyen vannak, ennek neve *képzetes tengely*.

Az (a, b)-be mutató helyvektort is azonosítjuk $a + bi$-vel.
Mivel $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, ezért *a komplex számokat ugyanúgy kell összeadni, mint a nekik megfelelő helyvektorokat.*

2. A trigonometrikus alak

Komplex szám hossza és szöge.

A $z = a + bi$ *hossza* az origótól mért távolsága. Pitagorasz tétele szerint ez $\sqrt{a^2 + b^2}$, azaz $|z|$.

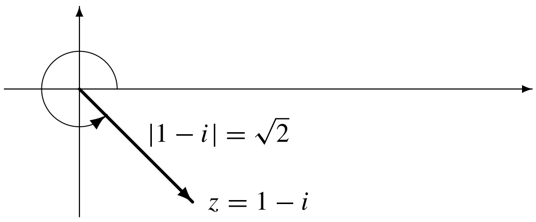


A $z \neq 0$ *szöge* a valós tengely pozitív felével bezárt szög.
Ez irányított szög, $0 \leq \arg(z) < 360°$. Nyilván $a = |z|\cos\alpha$ és $b = |z|\sin\alpha$. Ezért z-t egyértelműen meghatározza a hossza és a szöge.

Komplex szám trigonometrikus alakja.

Definíció
A $z \neq 0$ *trigonometrikus alakja* $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $r = |z|$ a z szám hossza, $\alpha = \arg(z)$ pedig a z szám szöge. A $z = a + bi$ az *algebrai alak*.

Példa
Az $1 - i$ hossza $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Szöge $315°$ (*nem* $45°$). Így trigonometrikus alakja $1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$.



A trigonometrikus alak egyértelműsége.

Példa
A -4 hossza (abszolút értéke) 4, szöge $180°$ (*nem* $0°$). Így trigonometrikus alakja $-4 = 4(\cos 180° + i\sin 180°)$.

Figyelem! A nullának nincs trigonometrikus alakja. Az $r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ szám *nincs* trigonometrikus alakban!

Az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ felírásban érdemes megengednünk olyan α szöget is, ahol $0 \le \alpha < 360^\circ$ nem feltétlenül teljesül.

Például $1 - i = \sqrt{2}\big(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ)\big)$.

Állítás (HF ellenőrizni, Kiss-jegyzet 1.4.4.)
Ha $r, s > 0$ valós, akkor $r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ pontosan akkor, ha $r = s$, és $\alpha - \beta$ a 360° egész számszorosa.

Szorzás trigonometrikus alakban.

Tétel
Komplex számok szorzásakor *hosszuk összeszorzódik*, *szögük* pedig *összeadódik*. (modulo 360°)

Bizonyítás
Legyen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Ekkor
$zw = rs\big((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)i\big)$.
Ez az ismert képletek miatt $rs\big(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)\big)$.

Emlékeztető: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Példa
$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ négyzete
$(1 - i)^2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\big(\cos(315^\circ + 315^\circ) + i\sin(315^\circ + 315^\circ)\big) =$
$= 2(\cos 630^\circ + i\sin 630^\circ) = 2(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ) =$
$= 2\big(0 + i(-1)\big) = -2i$.

Hatványozás trigonometrikus alakban.

Házi Feladat
Osztáskor a hosszakat elosztjuk, a szögeket kivonjuk.

Moivre képlete
$\big(r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\big)^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$. Azaz *hatványozáskor* a hosszat a kitevőre emeljük, a szöget a kitevővel szorozzuk.

A képlet negatív (egész) kitevőre is érvényes.

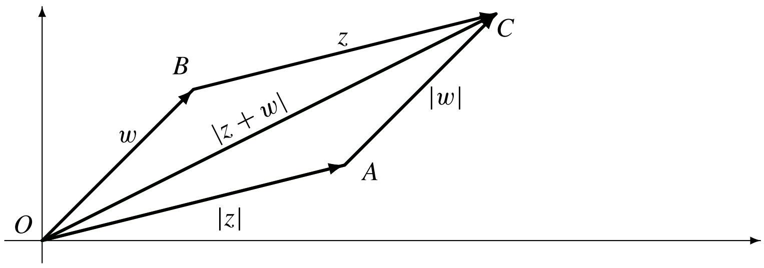
Példa
$(1 - i)^{1526} = \sqrt{2}^{1526}\big(\cos(1526\cdot 315^\circ) + i\sin(1526\cdot 315^\circ)\big) =$
$= 2^{763}(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) = 2^{763}(0 + 1i) = 2^{763}i$.

$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$
$1526/2 = 763$
$1526\cdot 315 = 480690 = 1335\cdot 360 + 90$

3. Geometria a komplex számsíkon

A háromszög-egyenlőtlenség.

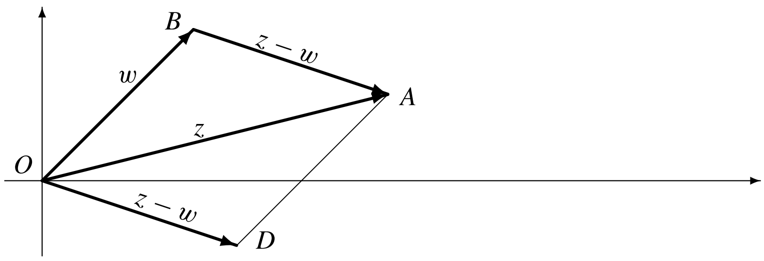
A háromszög-egyenlőtlenség
Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re $|z + w| \leq |z| + |w|$. *Egyenlőség* pontosan akkor áll, ha z és w párhuzamosak, és egyenlő állásúak, azaz $z = rw$ vagy $w = rz$ alkalmas pozitív valós r-re.



Bizonyítás
Háromszög-egyenlőtlenség az OAC háromszögre.

Két pont távolsága.

Állítás
Minden $z, w \in \mathbb{C}$-re a z és w távolsága $|z - w|$.



Bizonyítás
Legyen $z = \overrightarrow{OA}$ és $w = \overrightarrow{OB}$. Ekkor $z - w = \overrightarrow{BA}$, hiszen $w + (z - w) = z$. De $z - w$ hossza $|z - w|$.

Geometriai transzformációk.

A $z \mapsto z + w$ függvény a w vektorral való *eltolás*.

Állítás
Ha $w \neq 0$, akkor az $f : z \mapsto zw$ függvény (a w-vel szorzás) *forgatva nyújtás*: w szögével forgat az origó körül, és w hosszaszorosára nyújt az origóból.

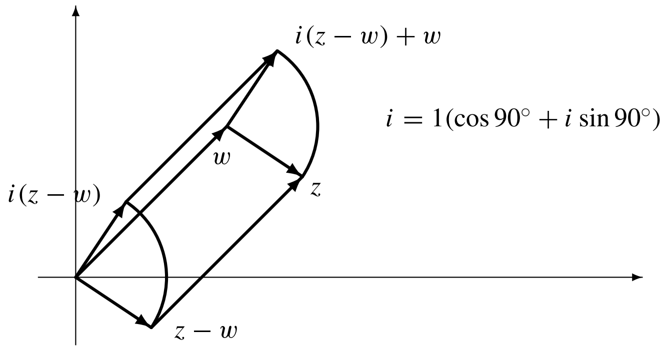
Bizonyítás
Legyen $z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ és $w = s(\cos\beta + i \sin\beta)$. Láttuk, hogy $zw = rs\big(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)\big)$. Ezért

- zw szöge z szögénél β-val nagyobb,
- zw hossza pedig z hosszának s-szerese.

Így az f függvény a z vektort β-val forgatja, s-szeresére nyújtja.

Forgatás pont körül.

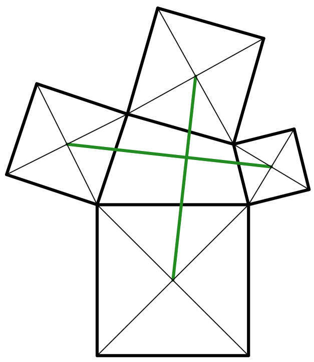
Mi lesz a z pont w körüli $+90$ fokos elforgatottja?



A w-ből z-be mutató $z-w$ vektort az origóba toljuk, elforgatjuk (i szöge 90°), visszatoljuk, azaz w-t hozzáadunk.

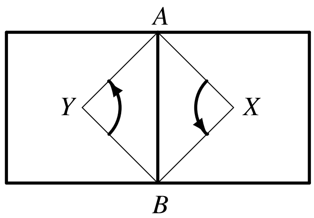
Geometria-feladatok megoldása komplex számokkal.

Feladat (Kiss-jegyzet, 1.4.12.)
Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes négyzetek középpontjait. Igazoljuk, hogy e két szakasz *merőleges*, és *egyenlő hosszú*.



Négyzet középpontja.

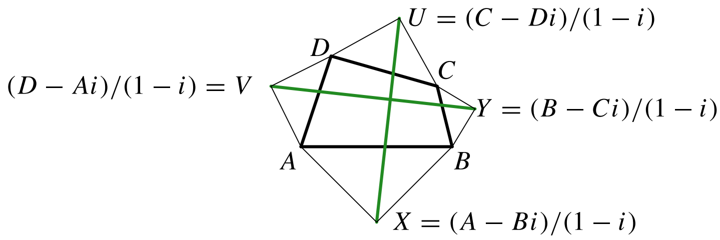
Határozzuk meg az AB oldalú két négyzet két középpontját.



Láttuk: w körül z-t $+90$ fokkal elforgatva $i(z-w)+w$-t kapjuk.

X körül A-t $+90$ fokkal forgatva B-t kapjuk.
Így $B = i(A-X)+X$. Innen $X = (B-Ai)/(1-i)$.
Y körül B-t $+90$ fokkal forgatva A-t kapjuk.
Így $A = i(B-Y)+Y$. Innen $Y = (A-Bi)/(1-i)$.

A négyszöges feladat megoldása.



$\overrightarrow{XU} = U - X = \dfrac{1}{1-i}\Big(\big(C-Di\big)-\big(A-Bi\big)\Big).$
$\overrightarrow{YV} = V - Y = \dfrac{1}{1-i}\Big(\big(D-Ai\big)-\big(B-Ci\big)\Big).$ De
$i\big((C-Di)-(A-Bi)\big) = \big((D-Ai)-(B-Ci)\big).$
Azaz $i(U-X) = V-Y$, így $\overrightarrow{XU}$ $+90^\circ$-os elforgatottja $\overrightarrow{YV}$.

Ezzel elvégeztük a Kiss-jegyzet 1.4. Szakaszát.