1. Az általános determináns

A megkívánt tulajdonságok.

Tétel
Ha T test, akkor $T^{n\times n}$-en értelmezhető a determináns, mely

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Bármely két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ bármely két mátrixra.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A bizonyítás stratégiája.

Emlékeztető 3×3**-ra**

$$\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

Definíció
Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times n}$, akkor $\det(M)$ szintén az M elemeiből készített bizonyos szorzatok előjeles összege. A képlet legközelebb, *permutációk előjelének* felhasználásával.

Az (1) és (2) tulajdonságból a (4) és az (5) szó szerint ugyanúgy következik, mint az $n = 2$ esetben (HF).
A (3) és (6) közvetlenül leolvasható lesz a képletből.
A (7) szorzattartási tulajdonságot jövőre igazoljuk.
A (8)-ról ma lesz szó *aldeterminánsok* felhasználásával.

A determináns kiszámítása.

Eljárás
Végezzünk a mátrixon módosított Gauss-eliminációt:

- Keresünk egy nem nulla elemet.
- Sor- vagy oszlopcserével a főátlóba tesszük (és közben följegyezzük, hogy hányszor váltottunk előjelet).
- Bekarikázzuk, majd kinullázzuk az *alatta* lévő elemeket (de a karikázott elemet nem változtatjuk 1-re).
- Ezt a három lépést ismételjük amíg lehet, a karikázandó számot mindig új sorból és oszlopból választva.
- Ha az eljárás azelőtt megáll, hogy a főátló minden elemén karika van, akkor a determináns nulla.
- Ellenkező esetben felső háromszögmátrixot kapunk, melynek determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.

Példa eliminációra.

Példa
Karikázás helyett a megfelelő számok zöld színűek.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Az első két oszlopot megcseréltük.
A második sorból kivontuk az első sor 4-szeresét.
A harmadik sorból kivontuk az első sor 7-szeresét.
A harmadik sorból kivontuk a második sor 2-szeresét.
Az eredmény a főátlóbeli elemek szorzata.

Példa

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Az első két oszlopot megcseréltük.
A második sorból kivontuk az első sor 4-szeresét.
A harmadik sorból kivontuk az első sor 7-szeresét.
A harmadik sorból kivontuk a második sor 2-szeresét.
HF: Ha egy sor vagy oszlop nulla, akkor a determináns nulla.
Az utolsó sor nulla, így a determináns is nulla.
Az utolsó sor az első két sornak lineáris kombinációja:
a második sor 2-szerese mínusz az első sor.

A determináns eltűnése.

Tétel
Egy determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopai lineárisan összefüggenek. Ugyanez a sorokra is igaz (hiszen a transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié).

Bizonyítás (vázlat)
Ha az oszlopok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, és $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, ahol pl. $\lambda_2 \neq 0$, akkor a második oszlopot szorozzuk λ_2-vel, majd adjuk hozzá az i-edik oszlop λ_i-szeresét minden $i \neq 2$-re. Ekkor a második oszlop nulla lesz, így ez a determináns nulla. Ez az eredeti determináns $\lambda_2 \neq 0$-szorosa, így az is nulla.
Megfordítva: Ha a determináns nulla, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik egy csupa nulla sor (amikor nem tudjuk folytatni). Ez a többi sor lineáris kombinációja az eljárás miatt. Ezért a sorok lineárisan összefüggenek. □

2. A determináns kifejtése

Előjeles aldeterminánsok.

Definíció
Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Az i-edik sor j-edik a_{ij} eleméhez tartozó M_{ij} *előjeles aldeterminánst* a következőképpen kapjuk.

- A mátrixból elhagyjuk az i-edik sort és a j-edik oszlopot.
- Ennek az $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixnak kiszámítjuk a determinánsát.
- Az eredményt megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

A $(-1)^{i+j}$ előjel megjegyzésére szolgál a *sakktáblaszabály*:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel.

Kifejtési tétel
Legyen T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times n}$ egy $n \times n$-es mátrix. Az M determinánsát a j-edik oszlop szerint úgy fejtjük ki, hogy az oszlop minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket összeadjuk. *Ekkor M determinánsát kapjuk.* Képletben:
$a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}M_{nj} = \det M$ minden rögzített j-re. Ugyanez sorokra is érvényes: $a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \ldots + a_{in}M_{in} = \det M$ minden rögzített i-re.

Ferde kifejtés: Ha a j-edik oszlop elemeit egy *másik oszlophoz* tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk, és összeadjuk, akkor az eredmény *nulla* lesz.
$a_{1j}M_{1k} + a_{2j}M_{2k} + \ldots + a_{nj}M_{nk} = 0$ minden $j \neq k$-ra. Ugyanez sorokra is érvényes.

Példa kifejtésre.

Példa
A harmadik oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 + 30 - 27 = -3.$$

Példa
Ferde kifejtés a második és harmadik sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -9 + 24 - 15 = 0.$$

Ugyanaz, mint $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ kifejtése a második sor szerint, így 0.

A kifejtés hatékonysága.

A ferde kifejtési tétel bizonyítása
Ha M-et úgy fejtjük ki, hogy a j-edik oszlop elemeit szorozzuk a k-edik oszlop megfelelő elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal, akkor ez valójában annak az N mátrixnak a j-edik oszlop szerinti kifejtése, amelyet úgy kapunk, hogy M-ben a k-adik oszlop helyébe a j-edik oszlopot másoljuk. Mivel N-nek van két egyforma oszlopa, a determinánsa nulla.

FONTOS!
Gauss-eliminációval *SOKKAL* gyorsabb a determináns kiszámítása, mint kifejtéssel.

A kifejtés lényegében $n!$ szorzás. Pl. $n = 6$-ra 720.
A Gauss-elimináció maximum $n^3/2$ szorzás. Ez $n = 6$-ra 108.

Az inverz mátrix képlete.

Tétel
Az M négyzetes mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $\det(M) \neq 0$, és ekkor az *inverz képlete* $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}((M_{ji}))$. Vagyis vesszük az előjeles aldeterminánsokból álló mátrixot, *transzponáljuk*, és elosztjuk M determinánsával.

Példa: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Bizonyítás
A kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel együtt biztosítja, hogy ha a fenti mátrixot (akármilyen sorrendben) megszorozzuk M-mel, akkor az egységmátrixot kapjuk (HF).
Megfordítva: ha M^{-1} létezik, akkor
$\det(M)\det(M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det(E_n) = 1$, így $\det(M) \neq 0$.

Balinverz és jobbinverz.

Tétel
Legyen T test és $M, N \in T^{n\times n}$. Ha $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$. Azaz *minden jobbinverz balinverz is.*

Bizonyítás
Nyilván $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(E_n) = 1$. Ezért $\det(M) \neq 0$, és így az imént bizonyított tétel miatt van egy K balinverze: $KM = E_n$. Elég belátni, hogy $K = N$, mert akkor $NM = KM = E_n$. Az asszociativitás miatt
$K = KE_n = K(MN) = (KM)N = E_nN = N$. □

Valójában azt igazoltuk, hogy M mindegyik jobbinverze megegyezik M mindegyik balinverzével. Speciálisan *a kétoldali inverz egyértelmű.*

3. A Cramer-szabály

Egyenletrendszer explicit megoldása.

Tétel
Adott egy $Mx = b$ lineáris egyenletrendszer, melyben ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen: $M \in T^{n\times n}$. Ekkor a megoldás pontosan akkor egyértelmű, ha $\det(M) \neq 0$.

Bizonyítás
A Gauss-eliminációt elvégezve pontosan akkor egyértelmű a megoldás, ha minden oszlopban van vezéregyes. Az M determinánsa pontosan ekkor nem nulla.

Cramer-szabály
Jelölje M_j azt a mátrixot, amelyet az M-ből úgy kapunk, hogy a j-edik oszlop helyére a b oszlopvektort tesszük. Ha $\det(M) \neq 0$, akkor a megoldás $x_j = \dfrac{\det(M_j)}{\det(M)}$.

Példa a Cramer-szabályra.

Példa
$2x - 3y = 1$
$5x - 2y = 8$

Megoldás

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2+24}{-4+15} = \frac{22}{11} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16-5}{-4+15} = \frac{11}{11} = 1.$$

A Cramer-szabály bizonyítása.

Bizonyítás

Az egyszerűbb jelölés kedvéért 2×2-esre. Legyen $M = [v_1, v_2]$, ekkor $M_1 = [b, v_2]$ és $M_2 = [v_1, b]$. Az $Mx = b$ azt jelenti, hogy $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$ (HF). Ezért $\det(M_1) = \det[x_1 v_1 + x_2 v_2, v_2] = \det[x_1 v_1, v_2] + \det[x_2 v_2, v_2] =$
$= x_1 \det[v_1, v_2] + x_2 \det[v_2, v_2] = x_1 \det[v_1, v_2] = x_1 \det(M)$.
Azaz $x_1 \det(M) = \det(M_1)$. Hasonlóan $x_2 \det(M) = \det(M_2)$. □

$M_1 = [b, v_2]$
Az első oszlopot összegre bontjuk.
Az x_1 és x_2 skalárokat kiemeljük az első oszlopból.
$\det[v_2, v_2] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.

Vandermonde-determináns (Freud-jegyzet, 1.5.2. Tétel)

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (z_j - z_i).$$

Bizonyítás: gyakorlaton.