1. A kétszer kettes determináns

2×2-es mátrix inverze.

Állítás

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ *inverze* $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $ad - bc = 0$, akkor M-nek nincs inverze.

A főátló két elemét megcseréljük, a mellékátló előjelet vált.

Bizonyítás

$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad + c(-b) & a(-c) + ca \\ bd + d(-b) & b(-c) + da \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$.

Ezt $ad - bc$-vel osztva az egységmátrixok kapjuk.
HF: Ellenőrizzük a szorzást a másik sorrendben is.

A 2×2-es mátrix determinánsa.

Definíció

Ha $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, akkor $\det(M) = ad - bc$ az M *determinánsa*.

Lemma

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Bizonyítás

$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$, $MN = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}$.

$\det(MN) = (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db')$.
$\det(M)\det(N) = (ad - bc)(a'd' - b'c')$.
HF: Mindkettő $aa'dd' - ac'db' - cd'ba' + cb'bc'$.

Amikor nincs inverz.

Előző állítás

Ha $ad - bc \neq 0$, akkor $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ *inverze* $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Ha $\det(M) = ad - bc = 0$, akkor M-nek *nincs inverze.*

A bizonyítás befejezése

Tegyük föl, hogy M-nek van inverze: $MN = E_2$.
Ekkor a lemma miatt $\det(M)\det(N) = \det(E_2)$.

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ennek determinánsa $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0$.

Ezért $\det(M)$ sem lehet nulla. $\square$

A determináns lineáris.

Állítás
$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}.$
$\det\begin{bmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ minden λ skalárra.
Azaz a determináns az első oszlopában *lineáris* (összegtartó, és skalárszoros-tartó). Ez a két tulajdonság a második oszlopra, és mindkét sorra is érvényes.

Bizonyítás
$\det\begin{bmatrix} a+a' & c \\ b+b' & d \end{bmatrix}$ és $\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' & c \\ b' & d \end{bmatrix}$ értéke
$(a+a')d-(b+b')c$, illetve $(ad-bc)+(a'd-b'c)$. Ezek egyenlők.
A skalárszoros-tartás bizonyítása hasonló.

Oszlopok egyenlősége.

Állítás
Ha a mátrix *két oszlopa egyenlő*, akkor a determináns nulla.

Bizonyítás
$\det\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = ab - ba = 0.$

Definíció
Az M *felső háromszögmátrix*, ha a főátló alatt csupa nulla áll.

$\det\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = ad - 0b = ad$, azaz felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

A linearitás következménye.

Állítás
Ha a determináns egyik oszlopához a másik oszlop skalárszorosát hozzáadjuk, akkor a determináns nem változik.

Bizonyítás
Új jelölés: $M = [v, w]$, ahol v és w a mátrix oszlopvektorai.
$\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w] + \det[\lambda w, w]$, mert az első oszlopban a determináns összegtartó. De $\det[\lambda w, w] = \lambda \det[w, w]$, mert a determináns az első oszlopban skalárszoros-tartó. Végül $\det[w, w] = 0$, mert a két oszlop egyenlő.
Ezért $\det[v + \lambda w, w] = \det[v, w]$.

Oszlopcsere.

Állítás
A két oszlop cseréjénél a determináns *előjelet vált*.

Bizonyítás
$\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$

$\det\begin{bmatrix} c & a \\ d & b \end{bmatrix} = cb - da = -(ad - bc).$

Második bizonyítás
$\det[w, v] = \det[w + v, v] = \det[w + v, v - (w + v)] =$
$= \det[w + v, -w] = \det[v, -w] = -\det[v, w].$

Az első oszlophoz hozzáadjuk a másodikat.
A második oszlopból kivonjuk az elsőt.
Az első oszlophoz hozáadjuk a másodikat.
Kiemelünk -1-et a második oszlopból.

A transzponált determinánsa.

Állítás
A transzponált mátrix determinánsa ugyanaz, mint az eredetié.

Bizonyítás
$\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc.$

$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb = ad - bc.$

Állítás
Így abból, hogy a determináns az oszlopaiban lineáris, *számolás nélkül* következik, hogy a soraiban is az, továbbá hogy sorcserénél is előjelet vált.

Sorcsere.

Állítás
Sorcserénél a determináns előjelet vált.

Mintabizonyítás
Legyen M az eredeti mátrix, N a sorcserével kapott mátrix. Ekkor N^T oszlopcseré-vel kapható M^T-ból. Beláttuk, hogy oszlopcserénél a determináns előjelet vált, azaz $\det(M^T) = -\det(N^T)$. Beláttuk, hogy transzponáláskor a determináns nem változik, azaz $\det(M^T) = \det(M)$ és $\det(N^T) = \det(N)$.
Ezért $\det(N) = \det(N^T) = -\det(M^T) = -\det(M)$.

HF: Hasonlóan lássuk be, hogy a determináns mindegyik sorában lineáris, továbbá, hogy ha az egyik sorhoz a másik sor skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

2. A háromszor hármas determináns

A megkívánt tulajdonságok.

Tétel
3×3-as mátrix determinánsa is definiálható úgy, hogy

(1) Minden oszlopában lineáris.

(2) Ha két oszlop egyenlő, akkor a determináns nulla.

(3) Az egységmátrix determinánsa 1, sőt felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

(4) Ha az egyik oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adjuk, akkor a determináns nem változik.

(5) Két oszlop cseréjekor előjelet vált.

(6) Transzponált determinánsa ugyanaz, mint az eredetié (így az oszlopokra kimondott tulajdonságok sorokra is igazak).

(7) $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

(8) Egy mátrix akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla.

A Sarrus-szabály.

Tétel
Ha T test és $M = ((a_{ij})) \in T^{3\times 3}$, akkor legyen $\det(M) =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ez teljesíti az előző tételben megkívánt tulajdonságokat.

Sarrus-szabály

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \color{green}{a_{12}} & \color{blue}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \color{green}{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \color{blue}{a_{21}} & a_{22} \\ \color{green}{a_{31}} & \color{blue}{a_{32}} \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \color{green}{a_{23}} \\ a_{31} & \color{green}{a_{32}} & \color{blue}{a_{33}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \color{green}{a_{11}} & \color{blue}{a_{12}} \\ \color{blue}{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Lemásoljuk az első két oszlopot a mátrix jobb oldalára. A három főátlóval párhuzamos egyenesen levő számokat összeszorozzuk, és ezek összegéből kivonjuk a három mellékátlóval párhuzamos egyenesen lévő számok szorzatát.