1. Mátrixösszeadás és skalárral szorzás

Mátrixok tömör jelölése.

Definíció
T test. Az $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times m}$ azt az n sorból és m oszlopból álló mátrixot jelöli, amelyben az i-edik sor j-edik eleme $a_{ij} \in T$.

Példák
Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{2\times 3}$, akkor $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.
Ha $M = ((i + j)) \in T^{2\times 2}$, akkor $M = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.
Ha $M = ((a_{ij} + b_{ij})) \in T^{2\times 2}$, akkor $M = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$.
Ha $M = ((\lambda a_{ij})) \in T^{1\times 3}$, akkor $M = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \end{bmatrix}$.

Összeg, λ-szoros, nullmátrix, ellentett.

Definíció
$M = ((a_{ij}))$ és $N = ((b_{ij})) \in T^{n\times m}$ mátrixok és $\lambda \in T$. Ekkor
$M + N = ((a_{ij} + b_{ij})) \in T^{n\times m}$ az M és N *összege*
(a két mátrix megfelelő elemeit összeadjuk);
$\lambda M = ((\lambda a_{ij})) \in T^{n\times m}$ az M mátrix λ-*szorosa*
(a mátrix minden elemét λ-val szorozzuk).

Két mátrixot akkor lehet összeadni, ha ugyanaz a méretük.

Definíció
Az $n \times m$-es *nullmátrix* az a mátrix, melynek minden eleme a T test nulleleme. Jele: 0.
Egy $n \times m$-es M mátrix *ellentettje* az a mátrix, melynek minden eleme az M megfelelő elemének ellentettje. $M = ((a_{ij}))$ ellentettje $-M = ((-a_{ij})) = (-1)M$.

A műveleti tulajdonságok.

Tétel (HF ellenőrizni)
Tetszőleges $M, N, K \in T^{n\times m}$ mátrixokra és λ, μ skalárokra

(1) $(M + N) + K = M + (N + K)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $M + N = N + M$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $M + 0 = 0 + M = M$ (0 a *nullmátrix*).

(4) $M + (-M) = (-M) + M = 0$ ($-M$ az M *ellentettje*).

(5) $(\lambda + \mu)M = \lambda M + \mu M$.

(6) $\lambda(M + N) = \lambda M + \lambda N$.

(7) $(\lambda\mu)M = \lambda(\mu M)$.

(8) $1 \cdot M = M$ (ahol 1 a T test *egységeleme*).

(9) $0 \cdot M = \lambda \cdot 0 = 0$, és ha $\lambda M = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $M = 0$.

2. Mátrixok szorzása

Sor és oszlop szorzata.

Ismétlés 2×2**-esre**

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Definíció

Legyen $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_mb_m$.

Minden elemet a neki megfelelővel szorzunk, majd összeadjuk.

2×2-es: *az első mátrix sorait szoroztuk a második oszlopaival!*

A szorzás definíciója.

Definíció
A szorzatmátrix i-edik sorának j-edik eleme az első mátrix i-edik sorának és a második mátrix j-edik oszlopának szorzata. Ez akkor értelmes, ha az első mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, ahány sora a másodiknak.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Állítás (HF)
Ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n \times m}$ és $N = ((b_{ij})) \in T^{m \times k}$, akkor az $MN \in T^{n \times k}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{\ell=1}^{m} a_{i\ell}b_{\ell j}$.

Negatív tulajdonságok.

Tétel
Az $n \times n$-es mátrixok között a szorzás $n \geq 2$ esetén *nem kommutatív* és *nem nullosztómentes*.

Bizonyítás $n = 2$**-re**
$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$, ami nem ugyanaz, mint
$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$, tehát *nem kommutatív*.
$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, azaz *nem nullosztómentes.*

Általában a leképezések kompozíciója sem kommutatív.
Példa (HF): két tengelyes tükrözés (ha a tengelyek szöge pl. $60°$).

Asszociativitás.

Tétel
A mátrixok szorzása *asszociatív*. Azaz $(MN)K = M(NK)$, feltéve, hogy az összes szükséges szorzást el lehet végezni. Azaz ha $M \in T^{n\times m}$, $N \in T^{m\times k}$, $K \in T^{k\times \ell}$.

Ronda számolás helyett elegánsan következik abból, hogy

Állítás
A függvények kompozíciója asszociatív.

Bizonyítás
Két függvény akkor egyenlő, ha minden helyen megegyeznek.
$\big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = f\big((g \circ h)(x)\big) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)$,
$\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = \big(f \circ g\big)\big(h(x)\big) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)$.

Az egységmátrix.

Definíció
Az $n \times n$-es E_n *egységmátrix* az a mátrix, ahol az i-edik sor j-edik eleme 1 ha $i = j$, és 0 ha $i \neq j$. Azaz a *főátlóban* végig 1 van, másutt csupa 0.

Példa
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\x & y & z\\u & v & w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b & c\\x & y & z\\u & v & w\end{bmatrix}.$$

Tétel (HF ellenőrizni)
Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor $E_n M = M E_n = M$.

A szorzás szabályai.

Tétel
Az $n \times n$-es mátrixok *egységelemes gyűrűt* alkotnak, azaz ha $M, N, K \in T^{n \times n}$ tetszőleges mátrixok és $\lambda, \mu \in T$, akkor

(1) $(M + N) + K = M + (N + K)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $M + N = N + M$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $M + 0 = 0 + M = M$ (0 a *nullmátrix*).

(4) $M + (-M) = (-M) + M = 0$ ($-M$ az M *ellentettje*).

(5) A szorzás asszociatív.

(6) Igaz mindkét oldali *disztributivitás*.

(7) Az egységmátrix kétoldali *egységelem*.

Továbbá $\lambda(MN) = (\lambda M)N = M(\lambda N)$ is teljesül.

Bizonyítás: a következő félévben, lineáris transzformációkkal.

3. Mátrix inverze

Szorzat rangja.

Tétel
Szorzatmátrix rangja legfeljebb akkora, mint bármelyik tényező rangja:
$r(MN) \leq r(M)$ és $r(MN) \leq r(N)$.

Bizonyítás: a következő félévben, lineáris leképezésekkel.

Definíció
Ha az M és N mátrixok MN szorzata az E_n egységmátrix, akkor M *balinverze* N-nek, N pedig *jobbinverze* M-nek.

Következmény
Ha $MN = E_n$, akkor M és N rangja legalább n. Speciálisan M-nek n sora és legalább n oszlopa, N-nek pedig n oszlopa és legalább n sora van.

Az inverz definíciója.

Házi feladat
Ha egy mátrixnak van bal- és jobbinverze is, akkor négyzetes.

Definíció
Ha $M, N \in T^{n \times n}$, akkor M és N egymás *inverzei*, ha $MN = NM = E_n$ (az $n \times n$-es egységmátrix). Jele: $N = M^{-1}$.

Tétel

(1) Az $M \in T^{n\times n}$ akkor és csak akkor invertálható, ha rangja n.

(2) Ha $M, N \in T^{n\times n}$ és $MN = E_n$, akkor $NM = E_n$. Ezért a négyzetes mátrixok között a balinverz (és ugyanúgy jobbinverz) egyben *kétoldali* inverz is.

Bizonyítás: Később, determinánsok felhasználásával.

Az inverz kiszámítása Gauss-eliminációval.

Tétel
Tegyük föl, hogy $M \in T^{n\times n}$.

- Legyen $K = [M, E_n] \in T^{n\times 2n}$ (azaz írjuk M jobb oldalára az egységmátrixot).
- Végezzük el a Gauss-eliminációt a K mátrixra úgy, hogy *vezéregyest kizárólag a bal oldalon* (az első n oszlopban) *választhatunk*.
- Ha keletkezik „tilos” sor (melynek az első fele végig nulla), akkor M *nem invertálható*.
- Ellenkező esetben sorcserékkel K bal feléből az egységmátrix lesz. Ekkor K *jobb felén* M^{-1} *keletkezik*.

$[M, E_n] \to \ldots \to [E_n, M^{-1}]$.
Bizonyítás: nincs. Példa: a gyakorlaton.

Lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

Definíció

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Az M a fenti lineáris egyenletrendszer mátrixa. Az $Mx = b$ az egyenletrendszer *mátrixos alakja* (az eredeti egyenleteknek egy képletben való, tömör felírása). Ha M négyzetes és invertálható, akkor a megoldás $x = M^{-1}b$.

Mátrix transzponáltja.

Definíció
Egy mátrix *főátlója* a bal felső sarokból 45° alatt induló egyenesen lévő elemekből áll. Ezek azok, amelyeknek a sor- és oszlopindexe megegyezik.
Egy mátrix *transzponáltja* a főátlójára vett tükörképe. Azaz ha $M = ((a_{ij})) \in T^{n\times m}$, akkor $M^T = ((a_{ji})) \in T^{m\times n}$. (A két indexet megcseréljük; az i-edik sorból i-edik oszlop lesz.)

Példák

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

A főátlót zöld szín jelöli. Sorvektor transzponáltja oszlopvektor és viszont.