1. Transzformációk mátrixa

Lineáris transzformációk.

Definíció
T test. Az $A : T^n \to T^n$ függvény *lineáris transzformáció*, ha tetszőleges $v, w \in T^n$ vektorra és λ skalárra teljesül, hogy

$$A(v + w) = A(v) + A(w) \text{ és } A(\lambda v) = \lambda A(v).$$

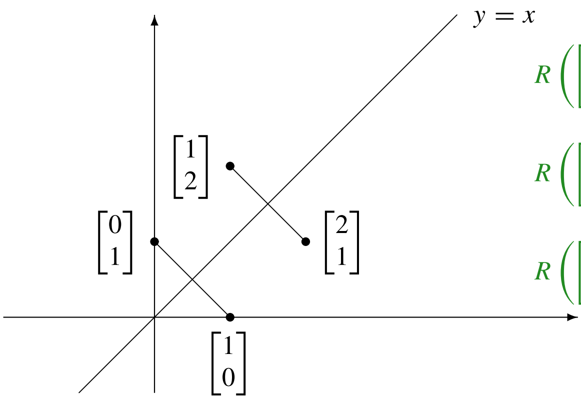
Vagyis A *összegtartó* és *skalárszoros-tartó*.

Főpélda (HF ellenőrizni)
Minden olyan egybevágósági (sőt hasonlósági) transzformáció a síkon és a térben, amely *az origót fixálja* (vagyis $A(0) = 0$).

- forgatás az origó körül a síkon;
- tükrözés az origóra (azaz 180°-os forgatás);
- tükrözés egy origón átmenő egyenesre (síkra);
- forgatás a térben egy origón átmenő egyenes körül;
- nyújtás az origóból.

Tükrözés egyenesre.

Példa
Legyen R az $y = x$ egyenesre való tükrözés.



$$R\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$R\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$R\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

A tükrözés képlete.

Kérdés

Legyen R az $y = x$ egyenesre való tükrözés. $R\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = ?$

Láttuk: $R\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $R\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ezért

$R\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right) + R\left(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right)$,

hiszen R *összegtartó*. A *skalárszoros-tartás* miatt ez

$R\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + R\left(y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = xR\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + yR\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$

$= x\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$.

Vektor képe általános transzformációnál.

Kérdés

Legyen $A : T^2 \to T^2$ *lineáris transzformáció*.

Ha $A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és $A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, akkor $A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = ?$

$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\right) + A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}\right)$,

hiszen A *összegtartó*. A *skalárszoros-tartás* miatt ez

$A\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + A\left(y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = xA\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + yA\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$

$= x\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ bx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cy \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}$.

Tehát *minden vektor képét ki tudjuk számolni*, ha ismerjük a, b, c, d értékét.

Lineáris transzformáció mátrixa.

Láttuk

Legyen $A : T^2 \to T^2$ *lineáris transzformáció*. Ha

$A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és $A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, akkor $A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}$.

Definíció

A fenti A *mátrixa* $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. (Az oszlopok $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ képei.)

Definíció
$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{bmatrix}$ (mátrix és vektor szorzata).

Következmény: Vektor képének kiszámítása: $A(v) = [A]v$.

A forgatás képlete.

Példa
Az origó körüli α szögű forgatás mátrixa $[F] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.
Komplex számokkal: ez a forgatás szorzás $\cos\alpha + i\sin\alpha$-val.

Az $x+iy$ számnak az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ felel meg: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow i$.

A $[F]$ *első* oszlopa: $1(\cos\alpha + i\sin\alpha) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$.

A *második*: $i(\cos\alpha + i\sin\alpha) = -\sin\alpha + i\cos\alpha \leftrightarrow \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$.

2. Transzformációk kompozíciója

Példa kompozícióra.

Kérdés
Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az $y = x$ egyenesre, majd forgatunk az origó körül $90°$-kal? Ez a két transzformáció *kompozíciója* (egymás utánja).

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$.
Mivel $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ezért $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ képe
$F\left(\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0y + (-1)x \\ 1y + 0x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$.
Az eredmény az y-tengelyre való tükrözés (Házi Feladat).

A kompozíció mátrixa.

Definíció
Ha $A, B : T^2 \to T^2$ transzformációk, akkor *kompozíciójuk* $(A \circ B)(v) = A\big(B(v)\big)$ tetszőleges $v \in T^n$ esetén. *Összetett függvény:* először B-t, utána A-t alkalmazzuk.

Tétel
$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \Longrightarrow [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Definíció
A fenti sor végén szereplő mátrixot a sorban szereplő első két mátrix *szorzatának* nevezzük. *A sorrend számít!*

Tehát $[A \circ B] = [A][B]$: *kompozíció mátrixa a mátrixok szorzata.*

A kompozíció mátrixának kiszámítása.

Tétel

$$[A]=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B]=\begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B]=\begin{bmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$$A\left(B\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa'+cb' \\ ba'+db' \end{bmatrix}.$$

Ezért $A \circ B$ első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A\left(B\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac'+cd' \\ bc'+dd' \end{bmatrix}.$$

Ezért $A \circ B$ második oszlopa is megfelelő.

Példa: $[F \circ R] = [F][R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

3. Transzformációk összege és skalárszorosa

Pontonkénti műveletek.

Emlékeztető
Polinomfüggvények összege: $(f+g)^*(b) = f^*(b) + g^*(b)$.
Analízisben *függvények összege*: $\sin + \cos$ az a függvény, amely tetszőleges x helyen a $\sin(x) + \cos(x)$ értéket veszi föl.
Ez a *pontonkénti összeadás*.

Definíció
Legyenek $A, B : T^n \to T^n$ lineáris transzformációk és $\lambda \in T$. Az A és B *összege* az az $A + B : T^n \to T^n$, melyre $(A+B)(v) = A(v) + B(v)$ tetszőleges $v \in T^n$ esetén.
Az A λ-*szorosa* az a $\lambda A : T^n \to T^n$, melyre $(\lambda A)(v) = \lambda\big(A(v)\big)$ tetszőleges $v \in T^n$ esetén.

Az összeg és skalárszoros lineáris.

Tétel
Legyenek $A, B : T^n \to T^n$ lineáris transzformációk és $\lambda \in T$. Ekkor $A + B$ *és* λA *is lineáris transzformáció.* Azaz:

(1) $A + B$ összegtartó.

(2) $A + B$ skalárszoros-tartó.

(3) λA összegtartó.

(4) λA skalárszoros-tartó.

Megjegyzés: Hasonlóan $A \circ B$ is lineáris.

Mintabizonyítás (3)-ra
$(\lambda A)(u+v) = \lambda\big(A(u+v)\big) = \lambda\big(A(u)+A(v)\big) =$
$= \lambda\big(A(u)\big) + \lambda\big(A(v)\big) = (\lambda A)(u) + (\lambda A)(v).$

A λA definíciója miatt
Az A összegtartása miatt
A skalárral szorzás tulajdonsága miatt
A λA definíciója miatt

Az összeg és skalárszoros mátrixa.

Tétel
Legyenek $A, B : T^2 \to T^2$ lineáris transzformációk és $\lambda \in T$. Tegyük föl, hogy $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ és $[B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$. Ekkor
$[A+B] = \begin{bmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{bmatrix}$ és $[\lambda A] = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{bmatrix}$.

Definíció
$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{bmatrix}$ és $\lambda \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{bmatrix}$.
Tehát $[A+B] = [A] + [B]$: *összeg mátrixa a mátrixok összege*,
és $[\lambda A] = \lambda[A]$: *λ-szoros mátrixa a mátrix λ-szorosa*.

Az összeg és skalárszoros mátrixa: bizonyítás.

Tétel
Legyenek $A, B : T^2 \to T^2$ lineáris transzformációk és $\lambda \in T$. Tegyük föl, hogy $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ és $[B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$. Ekkor
$[A+B] = \begin{bmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{bmatrix}$ és $[\lambda A] = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{bmatrix}$.

Bizonyítás
$(A+B)\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + B\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' \\ b+b' \end{bmatrix}.$
$(\lambda A)\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \lambda\left(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \lambda\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}.$
A második oszlop mindkét esetben hasonlóan számolható ki.