1. Oszlopvektorok

A sík vektorai.

Az origóból az $A = (a, b)$ pontba mutató $\overrightarrow{OA}$ vektort az (a, b) számpárral adjuk meg. Az $\overrightarrow{OA} = (a, b)$ és az $\overrightarrow{OB} = (c, d)$ vektorok összege $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (a + c, b + d)$, ami a paralelogramma-szabállyal is megkapható.

Legyen λ valós szám (skalár). Az $\overrightarrow{OA}$ vektor λ-szorosa az $\overrightarrow{OB}$, ahol a B pontot úgy kapjuk, hogy az A pontot az origóból $|\lambda|$-szorosára nyújtjuk, és ha λ negatív, akkor tükrözzük is az origóra.

Állítás
Ha $\overrightarrow{OA} = (a, b)$, akkor $\lambda\overrightarrow{OA} = (\lambda a, \lambda b)$. □

Általános vektorok.

Az (a, b) vektort ezentúl oszlopvektornak írjuk: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Tehát $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$ és $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$.

Definíció
Legyen T test. A T fölötti n magasságú *oszlopvektorok* az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú „táblázatok”, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Az összes ilyen oszlopvektorból álló halmaz jele T^n. Az n szám a T^n *dimenziója*. A sík, azaz $\mathbb{R}^2$ kétdimenziós.

Műveletek vektorokkal.

Definíció
Legyen T test, és értelmezzük T^n-en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az *összeadást* és a λ *skalárral szorzást*. Azaz összeadni és skalárral szorozni *komponensenként* kell.

A *nullvektor* $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ és az *ellentett*: $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$
(minden komponens T nulleleme) (komponensenkénti ellentett)

A műveleti tulajdonságok.

Tétel (HF ellenőrizni)
Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a *nullvektor*).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ($-u$ az u *ellentettje*).

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test *egységeleme*).

(9) $0 \cdot u = \lambda \cdot 0 = 0$, és ha $\lambda u = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $u = 0$.

Kétféle 0*!*

2. Lineáris függés és függetlenség

Lineáris függetlenség.

Definíció
A $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok *lineárisan függetlenek*, ha a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ összefüggés *CSAK ÚGY* teljesülhet, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. (Itt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ tetszőleges skalárok.) Egyébként a $v_1, \ldots, v_m \in T^n$ vektorok *lineárisan összefüggők*.
A $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$ neve: *lineáris kombináció*.

Állítás (HF)

- A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független, ha nem párhuzamosak.
- A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő,
  ha egy síkban vannak.

Példák függésre és függetlenségre.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$ vektorok lineárisan összefüggenek.

Valóban, $2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

Az $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek.

Valóban, ha $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\lambda_1\\3\lambda_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\lambda_2\\5\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\lambda_1+4\lambda_2\\3\lambda_1+5\lambda_2\end{bmatrix}$,
akkor $2\lambda_1+4\lambda_2=0$ és $3\lambda_1+5\lambda_2=0$. Ezt a homogén lineáris egyenletrendszert megoldva $\lambda_1=\lambda_2=0$.

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval.

Legyen $v_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\dots\\a_{n1}\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\dots\\a_{n2}\end{bmatrix}$, $\dots$, $v_m=\begin{bmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\dots\\a_{nm}\end{bmatrix}$.

Ekkor a $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_mv_m=0$ az

$$\begin{aligned}a_{11}\lambda_1+\dots+a_{1m}\lambda_m&=0\\a_{21}\lambda_1+\dots+a_{2m}\lambda_m&=0\\&\dots\\a_{n1}\lambda_1+\dots+a_{nm}\lambda_m&=0\end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ ismeretlenekre.
A $v_1,\dots,v_m$ akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha *nincs szabad változó*.
Következmény: Ha több vektor van, mint a dimenzió, akkor ezek lineárisan összefüggenek (van nemtriviális megoldás).

A függetlenség elemi tulajdonságai.

Állítás (HF)

(1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

(2) A v vektorból álló egyelemű rendszer akkor és csak akkor független, ha $v\neq 0$.

(3) Ha egy vektorrendszerben benne van a nullvektor, akkor az összefüggő.

(4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

(5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

3. Vektorrendszer és mátrix rangja

A rang fogalma.

Definíció
A $v_1, \dots, v_m \in T^n$ vektorrendszer *rangja* r, ha

(1) Van közöttük r darab lineárisan független;

(2) Nincs közöttük $r + 1$ darab lineárisan független.

Vagyis a rang a legnagyobb olyan szám, ahány darab lineárisan független vektort a rendszerből ki lehet választani. Jelölés: $r(v_1, \dots, v_m) = r$.

Példa
Az $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1,
mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa.

A rang tulajdonságai.

Tétel
Ha adott a $v_1, \dots, v_m \in T^n$ *lineárisan független* vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik vektor tetszőleges skalárszorosát.

Ha $v_1, \dots, v_m \in T^n$ *tetszőleges* vektorrendszer, akkor az (1) és (2) lépéseknél a rangja nem változik.

Bizonyítás
A függetlenségre vonatkozó állítás könnyű Házi Feladat. A rangra vonatkozó állítást a következő félévben igazoljuk, a generált altér fogalmának felhasználásával.

Maximális független rendszerek.

Definíció
Ha adott a $v_1, \dots, v_m \in T^n$ vektorrendszer, akkor ennek egy részrendszerét *maximális független rendszernek* nevezzük, ha lineárisan független, de a kimaradó vektorok *bármelyikét* hozzávéve már lineárisan összefüggő lesz.

Tétel
Minden maximális független részrendszer elemszáma egyenlő a vektorrendszer r rangjával. Ezért minden r-nél kevesebb elemű független részrendszer kiegészíthető egy r elemű független rendszerré.

Bizonyítás: a következő félévben, a lineáris függés és a generált altér fogalmának felhasználásával.

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval.

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Végezzük el a Gauss-eliminációt a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer esetében. Ekkor a $v_1, \dots, v_m$ rendszer rangja *a vezéregyesek száma*.

A bizonyítás ötlete: lásd később.

Mátrix rangja.

Definíció

Egy $n \times m$-es *mátrix* egy n sorból és m oszlopból álló táblázat, melynek elemei egy T test elemei. Ezek halmazát $T^{n \times m}$ jelöli. Speciálisan T^n elemei $n \times 1$-es mátrixoknak tekinthetők. A *sorvektorok* az $1 \times m$-es mátrixok.

Definíció

Az M mátrix *oszloprangja* az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Az M *sorrangja* a soraiból álló vektorrendszer rangja.

Tétel

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a *mátrix rangja*, jele $r(M)$.

A sor- és oszloprang egyenlősége.

Bizonyítás (vázlat)

(1) Készítsünk a mátrixból homogén lineáris egyenletrendszert, és végezzük el a Gauss-eliminációt.

(2) Korábban láttuk, hogy ennek lépései egy vektorrendszer rangját nem változtatják meg. Így a sorrang nem változik.

(3) Könnyű látni, hogy az oszloprang sem változik közben.

(4) Az eliminált alakban azok a vektorok alkotnak maximális független rendszert, amelyekben van vezéregyes, mind a sorok, mind az oszlopok között.

Következmény

A mátrix rangjának kiszámításakor *mind a sorokkal, mind az oszlopokkal szabad Gauss-eliminációs lépéseket tenni.*