# 1. Bevezetés

**A félév anyaga.**

- *Komplex számok*
  - Műveletek
  - Kapcsolat a geometriával
  - Gyökvonás
- *Polinomok*
  - A gyökök száma
  - A gyökök és együtthatók összefüggése
  - Szorzatra bontás, számelméleti kérdések
  - A harmad- és negyedfokú egyenlet
- *Lineáris algebra*
  - Lineáris egyenletrendszerek
  - Műveletek vektorokkal
  - Geometriai transzformációk megadása mátrixokkal
  - Determinánsok és alkalmazásaik

**Irodalom.**

- `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/`
  - Az előadáson látott prezentáció, és nyomtatható változata
  - A gyakorlatokon szereplő feladatsorok
  - Információk a vizsgákról, zárthelyikről
  - Tematikák, oktatási anyagok, ajánlott irodalom
- *Kiss Emil: Bevezetés az Absztrakt Algebrába*

  `www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook`
  - Komplex számok, polinomok
  - A későbbi félévek anyaga (csoportok, gyűrűk)
  - A gyakorlatokon szereplő feladatok megoldásai
- *Freud Róbert: Lineáris algebra*
  - Az első három félév lineáris algebra anyaga
  - Feladatok megoldásokkal
- *További feladatgyűjtemények*
  - Fagyejev-Szominszkij: Felsőfokú algebrai feladatok
  - Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok

**Általános tanácsok.**

- *Az előadáson figyelni érdemes,* ***nem jegyzetelni!*** Ez a prezentáció csak áttekintés.
  - A nyomtatott változatában hivatkozások is vannak a felsorolt könyvekre, ahol magyarázatok találhatók.
- *Az anyagot meg is kell érteni!*
  - a megértés az alkalmazás képessége;
  - feladatmegoldás a gyakorlaton, megoldások a jegyzetben;
  - fontos a logikai szabatosság, a gondolkodás fejlesztése.
- *Elméleti matematikából csak kevesen fognak megélni!* Hozzá célszerű tanulni mást is, például:
  - biológia, fizika, kémia, informatika, tanári mesterség;
  - közgazdasági ismeretek, mérnöki tudományok.
- *Használjátok a számítógépet!*
  - Kérjetek accountot a `cs.elte.hu`-ra.
  - Konzultációs gyorssegély: `ewkiss@cs.elte.hu`
  - TEX, `Linux`, `Maple`, `Mathematica`, `GAP`.
- *Aki letegez benneteket, tegezzétek vissza!*

**A számonkérés módja.**

- *A gyakorlati jegy:*
  - Csak három hiányzás megengedett.
  - Minden gyakorlaton röpdolgozat: összesen 10%;
    - az előző előadáson elhangzott tételekből, definíciókból;
    - az előző heti gyakorlaton tanult készségekből;
    - az előző héten feladott felzárkóztató házi feladatokból.
  - Írásbeli házi feladatok: összesen további 10%.
  - Két évfolyamzárthelyi: $40 - 40\%$;
    - az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
    - javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
    - Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- *A vizsgajegy:*
  - Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.
  - Írásbeli vizsga, az anyag megértését is méri;
  - Összesen három alkalom; egyre kell eljönni, kivéve ha az nem sikerül.

# 2. A komplex számok definíciója

**A számkör bővítése.**

**Tétel**
Nincs olyan $n$ *természetes* szám, melyre $n + 3 = 1$.

**Bizonyítás**
Ha $n$ természetes szám, akkor $n + 3 \geq 3$.

Ezért bevezettük a *negatív* számokat, közöttük van ilyen $n$. Mindannyian tudjuk, hogy ezek hasznosak.

**Tétel**
Nincs olyan $r$ *valós* szám, melyre $r^2 = -1$.

**Bizonyítás**
Ha $r \geq 0$, akkor $r^2 \geq 0$. Ha $r < 0$, akkor is $r^2 = (-r)^2 \geq 0$.

Ezért be fogjuk vezetni a *komplex* számokat, amelyek hasznosnak bizonyulnak majd

- egyenletek megoldásakor;
- geometriai alakzatok, valós függvények megértésekor;
- a fizikában (folyadékok áramlása, kvantummechanika, a téridő szerkezete).

**Mi az a komplex szám?.**

Az $i$ betű olyan „számot" jelöl, melyre $i^2 = -1$.

*Szeretnénk megtartani a szokásos számolási szabályokat.*

Mennyi lehet $(1 + i)^2$?

$(1 + i)(1 + i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i \cdot i = 1 + i + i - 1 = 2i.$

Csak ez lehet az eredmény.

**Hasonlóan (HF ellenőrizni)**
$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$, mert $(bi)(di) = -bd$;
$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

*Az $i$-vel úgy számolunk, mintha ismeretlen lenne, de $i^2$ helyett $-1$-et írunk.*

**A komplex számok definíciója.**

Komplex számnak nevezzük az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol $a$ és $b$ valós számok. A $z = a + bi$ *valós része* $\mathrm{Re}(z) = a$. A $z = a + bi$ *képzetes része* $\mathrm{Im}(z) = b$.

*Figyelem!* A képzetes rész *valós* szám, *nem* $bi$.

Az $a+bi$ csak akkor egyenlő $c+di$-vel, ha $a = c$ és $b = d$, azaz ha a valós és képzetes részük is megegyezik.

Így a valós és a képzetes rész definíciója egyértelmű.

A valós számokat is komplex számnak képzeljük: $a = a + 0i$. A $bi$ alakú számok *tisztán képzetesek* (valós részük nulla).

Az $i$ az *imaginárius* (képzetes) szó rövidítése.

# 3. Műveletek komplex számokkal

**Összeadás, kivonás, szorzás, ellentett.**

**Jelölések:**
A komplex számok halmaza: $\mathbb{C}$. A valós számok halmaza: $\mathbb{R}$. A racionális számok halmaza: $\mathbb{Q}$. Az egész számok halmaza: $\mathbb{Z}$.

**Az összeadás, kivonás, szorzás definíciója:**
$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.
$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

A $z \in \mathbb{C}$ *ellentettje* $w$, ha $z + w = 0$. Az ellentett jele $-z$. A $z = a + bi$ (egyetlen) ellentettje $w = (-a) + (-b)i$. A kivonás az ellentett hozzáadása: $u - z = u + (-z)$.

**Osztás, reciprok.**

A $w$ komplex szám *reciproka* $u$, ha $wu = 1$. Jele $u = \dfrac{1}{w}$.

Az *osztás* a reciprokkal való szorzás: $\dfrac{z}{w} = z\dfrac{1}{w}$, mert $z\dfrac{1}{w}w = z$.

Van-e $w = 1 + i$-nek reciproka a komplex számok között?

*Ötlet:* Szorozzuk meg $1 - i$-vel!

$(1 + i)(1 - i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$. Tehát

$$(1+i)\frac{1-i}{2} = 1\,, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\,.$$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**A reciprok kiszámítása.**

Az $a + bi$ reciprokának kiszámításához $a - bi$-vel jó bővíteni.

$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$.

*Figyelem!* Az eredmény *nem* $a^2 - b^2$!

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i \, .$$

Ez értelmes, ha $a+bi \neq 0$, mert ekkor $a$ és $b$ egyike nem nulla, és ezért $a^2+b^2 > 0$ (azaz nem nulla).

**Következmény**
Minden nem nulla komplex számnak van reciproka, ezért minden nem nulla komplex számmal lehet osztani.

## 4. Konjugált és abszolút érték

**Konjugált és abszolút érték.**

**Definíció**
A $z = a + bi$ *konjugáltja* $\overline{z} = a - bi$. A $z = a + bi$ *abszolút értéke* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (nemnegatív valós).

Az imént azt láttuk be, hogy $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

**Megjegyzés**
Komplex számok között *nem igaz*, hogy $|z|$ értéke vagy $z$, vagy $-z$.
Például $|1 + i| = \sqrt{2}$, ami nem $1 + i$ és nem $-(1 + i)$. Ha $z = a + 0i$ valós, akkor abszolút értéke $\sqrt{a^2}$, tehát ugyanaz, mint az abszolút érték „régi” értelme.

*Nem használhatunk egyenlőtlenségeket* nem valós komplex számok között. Értelmetlen olyat leírni, hogy $i > 0$ vagy $i < 0$.

**A konjugált tulajdonságai.**

**Tétel (HF ellenőrizni)**
Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) A konjugálás kölcsönösen egyértelmű, és $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $z = \overline{z}$ akkor és csak akkor, ha $z$ valós.

(3) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (a konjugálás összegtartó).

(4) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (a konjugálás szorzattartó).

(5) Osztáskor a nevező konjugáltjával érdemes bővíteni.

**Mintabizonyítás (3)-ra:**
Legyen $z = a + bi$ és $w = c + di$. Ekkor
$\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i.$
$\overline{z} + \overline{w} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i.$
Ezek tényleg egyenlők.

**Az abszolút érték tulajdonságai.**

**Tétel (HF ellenőrizni)**
Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$.

(2) $|\,\overline{z}\,| = |z|$.

(3) $|zw| = |z||w|$ (az abszolút érték szorzattartó).

**Mintabizonyítás (3)-ra:**

$$|zw|^2 =$$

az $|u|^2 = u\overline{u}$ azonosság miatt

$$= zw\,\overline{zw} =$$

már tudjuk, hogy a konjugálás szorzattartó

$$= zw\,\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2\,.$$

# 5. Műveleti tulajdonságok

**A műveleti tulajdonságok.**
*Komplex számokkal a „szokásos” módon számolhatunk.*

**Tétel (HF ellenőrizni)**
Tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{C}$ számokra érvényesek az alábbiak.

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $x + y = y + x$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $x + 0 = 0 + x = x$ (az ilyen tulajdonságú elem a *nullelem*).

(4) Minden $x$-nek van *ellentettje*.

(5) $(xy)z = x(yz)$ (a szorzás asszociatív).

(6) $xy = yx$ (a szorzás kommutatív).

(7) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (más szóval az 1 *egységelem*).

(8) Minden nem nulla $x$-nek van *reciproka*.

(9) $(x + y)z = xz + yz$ (*disztributivitás*).

Mintabizonyítás: Kiss-jegyzet, 1.3.4. Gyakorlat.

**Nullosztómentesség.**

Ha $z$ komplex szám, akkor nyilván $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

**Tétel**
Két komplex szám szorzata csak akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla. E tulajdonság neve: *nullosztómentesség*.

**Bizonyítás**
Tegyük föl, hogy $zw = 0$, de $z \neq 0$. Meg kell mutatnunk, hogy akkor $w = 0$. Mivel $z \neq 0$, van reciproka: $uz = 1$. Ezzel szorozva

$$w = 1 \cdot w = (uz)w = u(zw) = u \cdot 0 = 0\,.$$

Ezzel elvégeztük a Kiss-jegyzet 1.3. Szakaszát. Az 1.1. Szakasz (számolás maradékokkal) a gyakorlaton lesz.