BSc algebra1 alap- és középszintű gyakorlat

Második zárthelyi (2006. dec. 12.) — eredmények (főátló 13-as változat)

1. a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}$. A mátrix mindkét oszlopa és a végeredmény is 1 pont.

b) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}$, a második indexek sorrendjében 8 inverzió van, az előjel +.

2. a) Bármelyik módszerrel számolva a determináns $1-c$, ezért $c = 3$ (1 pont). Az inverz képletéből az előjeles aldetermináns $-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$, tehát az eredmény $8/(-2) = -4$ (2 pont).

b) Az 1 gyök, például Hornerrel kiemelve $(x-1)(x^2+x+2)$ adódik (2 pont). A második tényező is irreducibilis, mert másodfokú és 0, 1, 2 nem gyöke (1 pont).

3. Az eliminált mátrix $\begin{bmatrix} \boxed{1} & -27 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}$ (2 pont), y az egyetlen szabad változó, a megoldás $(x, y, z) = (1 + 27y, y, -11y)$ (1 pont). Mivel két vezéregyes van, a mátrix rangja 2, ezért a három sor nem lehet független (3 pont). *Második megoldás:* az első két sor összege a harmadik, ezért nem függetlenek (3 pont). *Harmadik (rutin)megoldás:* az $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ mátrixra is elvégezzük az eliminációt.

4. a) Ha a mátrix köbe nulla, akkor $d = -3$, mert alsó háromszögmátrix köbre emelésénél a főátló megfelelő elemei összeszorzódnak (1 pont). Ha $d = -3$, akkor szigorú alsó háromszögmátrixot kapunk, amelynek a köbe nulla (2 pont).

b) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ (3 pont).

5. $f(x) = x^5 + 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 4x + 1$ a $\mathbb{Z}_2$ fölött $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$, ami irreducibilis. Ugyanis nem gyöke a 0 és az 1, így csak másod- és harmadfokú irreducibilis polinom szorzata lehetne, de $(x^2+x+1)(x^3+x+1) = x^5+x^4+1$, és $(x^2+x+1)(x^3+x^2+1) = x^5+x+1$ egyike sem a fenti polinom (3 pont).

Mivel $f(x-1) = x^5 - 3x^3 + 3$-ra alkalmazható a Schönemann-Eisenstein, ha $p = 3$, ezért az eredeti f is irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Második megoldás: Ha az eredeti polinom felbomlana $\mathbb{Q}[x]$-ben, akkor a második Gauss-lemma miatt felbomlana gh alakban $\mathbb{Z}$ fölött is, ahol g és h foka 5-nél kisebb (1 pont). Vegyük ezt a felbontást mod 2. Mivel f irreducibilis **és ötödfokú** $\mathbb{Z}_2$ fölött, ezért triviális felbontást kapunk, így g és h egyike mod 2 ötödfokú (1 pont). De akkor a megfelelő eredeti g, illetve h is ötödfokú, ami ellentmondás (1 pont).

6. Az első sorból emeljünk ki 3-at. Ezután az első sor 6-szorosát vonjuk ki a másodikból. Ekkor a második sor második eleme 1 lesz. Vonjuk ki a második sor 6-szorosát a harmadik sorból, és így tovább, mindegyik 6-ost a felette frissen keletkezett 1 ejti ki. A végén felső háromszögmátrixot kapunk, amelynek főátlója 1, így a végeredmény 3.