BSc algebra1 alap- és középszintű gyakorlat

Második zárthelyi (2006. dec. 12.) — eredmények (főátló 17-es változat)

1. a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$. A mátrix mindkét oszlopa és a végeredmény is 1 pont.
b) $a_{15}a_{23}a_{34}a_{42}a_{51}$, a második indexek sorrendjében 9 inverzió van, az előjel $-$.

2. a) Bármelyik módszerrel számolva a determináns $18 - c$, ezért $c = 20$ (1 pont). Az inverz képletéből az előjeles aldetermináns $-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3$, tehát az eredmény $3/(-2) = -(3/2)$ (2 pont).
b) Az 1 gyök, például Hornerrel kiemelve $(x-1)(2x^2+x+1)$ adódik (2 pont). A második tényező is irreducibilis, mert másodfokú és 0, 1, 2 nem gyöke (1 pont).

3. Az eliminált mátrix $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 17 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & \boxed{1} & -1 \end{bmatrix}$ (2 pont), y az egyetlen szabad változó, a megoldás $(x, y, z) = (3-17y, y, -1+7y)$ (1 pont). Mivel két vezéregyes van, a mátrix rangja 2, ezért a három sor nem lehet független (3 pont). *Második megoldás:* az első és a harmadik sor összege a második, ezért nem függetlenek (3 pont). *Harmadik (rutin)megoldás:* az $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ mátrixra is elvégezzük az eliminációt.

4. a) Ha a mátrix köbe nulla, akkor $d = 2$, mert alsó háromszögmátrix köbre emelésénél a főátló megfelelő elemei összeszorzódnak (1 pont). Ha $d = 2$, akkor szigorú alsó háromszögmátrixot kapunk, amelynek a köbe nulla (2 pont).
b) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ (3 pont).

5. $f(x) = x^5 + 5x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 9x + 1$ a $\mathbb{Z}_2$ fölött $x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$, ami irreducibilis. Ugyanis nem gyöke a 0 és az 1, így csak másod- és harmadfokú irreducibilis polinom szorzata lehetne, de $(x^2+x+1)(x^3+x+1) = x^5+x^4+1$, és $(x^2+x+1)(x^3+x^2+1) = x^5+x+1$ egyike sem a fenti polinom (3 pont).

Mivel $f(x-1) = x^5 - 7x^3 + 7x^2 - 7x + 7$-re alkalmazható a Schönemann-Eisenstein, ha $p = 7$, ezért az eredeti f is irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Második megoldás: Ha az eredeti polinom felbomlana $\mathbb{Q}[x]$-ben, akkor a második Gauss-lemma miatt felbomlana gh alakban $\mathbb{Z}$ fölött is, ahol g és h foka 5-nél kisebb (1 pont). Vegyük ezt a felbontást mod 2. Mivel f irreducibilis **és ötödfokú** $\mathbb{Z}_2$ fölött, ezért triviális felbontást kapunk, így g és h egyike mod 2 ötödfokú (1 pont). De akkor a megfelelő eredeti g, illetve h is ötödfokú, ami ellentmondás (1 pont).

6. Az első sorból emeljünk ki 4-et. Ezután az első sor 8-szorosát vonjuk ki a másodikból. Ekkor a második sor második eleme 1 lesz. Vonjuk ki a második sor 8-szorosát a harmadik sorból, és így tovább, mindegyik 8-ast a felette frissen keletkezett 1 ejti ki. A végén felső háromszögmátrixot kapunk, amelynek főátlója 1, így a végeredmény 4.