BSc algebra1 alap- és középszintű gyakorlat

Második zárthelyi (2006. dec. 12.) — eredmények (főátló 37-es változat)

1. a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$. A mátrix mindkét oszlopa és a végeredmény is 1 pont.
b) $a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$, a második indexek sorrendjében 5 inverzió van, az előjel $-$.

2. a) Bármelyik módszerrel számolva a determináns $8 - c$, ezért $c = 10$ (1 pont). Az inverz képletéből az előjeles aldetermináns $-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1$, tehát az eredmény $1/(-2) = -(1/2)$ (2 pont).
b) Az 1 gyök, például Hornerrel kiemelve $(x-1)(2x^2+2x+1)$ adódik (2 pont). A második tényező is irreducibilis, mert másodfokú és 0, 1, 2 nem gyöke (1 pont).

3. Az eliminált mátrix $\begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix}$ (2 pont), y az egyetlen szabad változó, a megoldás $(x, y, z) = (2y - 1, y, 1 - 2y)$ (1 pont). Mivel két vezéregyes van, a mátrix rangja 2, ezért a három sor nem lehet független (3 pont). *Második megoldás:* az első és a harmadik sor összege a második, ezért nem függetlenek (3 pont). *Harmadik (rutin)megoldás:* az $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixra is elvégezzük az eliminációt.

4. a) Ha a mátrix köbe nulla, akkor $d = 4$, mert alsó háromszögmátrix köbre emelésénél a főátló megfelelő elemei összeszorzódnak (1 pont). Ha $d = 4$, akkor szigorú alsó háromszögmátrixot kapunk, amelynek a köbe nulla (2 pont).
b) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ (3 pont).

5. $f(x) = x^5 - 2x^4 - 11x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ a $\mathbb{Z}_2$ fölött $x^5 + x^3 + 1$, ami irreducibilis. Ugyanis nem gyöke a 0 és az 1, így csak másod- és harmadfokú irreducibilis polinom szorzata lehetne, de $(x^2+x+1)(x^3+x+1) = x^5+x^4+1$, és $(x^2+x+1)(x^3+x^2+1) = x^5+x+1$ egyike sem a fenti polinom (3 pont).

Mivel $f(x-1) = x^5 - 7x^4 + 7x^3 + 7x^2 - 14x + 7$-re alkalmazható a Schönemann-Eisenstein, ha $p = 7$, ezért az eredeti f is irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Második megoldás: Ha az eredeti polinom felbomlana $\mathbb{Q}[x]$-ben, akkor a második Gauss-lemma miatt felbomlana gh alakban $\mathbb{Z}$ fölött is, ahol g és h foka 5-nél kisebb (1 pont). Vegyük ezt a felbontást mod 2. Mivel f irreducibilis **és ötödfokú** $\mathbb{Z}_2$ fölött, ezért triviális felbontást kapunk, így g és h egyike mod 2 ötödfokú (1 pont). De akkor a megfelelő eredeti g, illetve h is ötödfokú, ami ellentmondás (1 pont).

6. Az első sorból emeljünk ki 4-et. Ezután az első sor 12-szeresét vonjuk ki a másodikból. Ekkor a második sor második eleme 1 lesz. Vonjuk ki a második sor 12-szeresét a harmadik sorból, és így tovább, mindegyik 12-est a felette frissen keletkezett 1 ejti ki. A végén felső háromszögmátrixot kapunk, amelynek főátlója 1, így a végeredmény 4.