Bsc algebra1 alap- és középszintű gyakorlat

Első mintazárthelyi (2006. okt. 17.) — eredmények

1. a) A trigonometrikus alak $-1+i=\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$ (1 pont). E szám egyik negyedik gyöke $\sqrt[8]{2}(\cos 33{,}75^\circ + i\sin 33{,}75^\circ)$ (1 pont). A többi negyedik gyököt negyedik egységgyökökkel: i-vel, -1-gyel és $-i$-vel való szorzás adja, a szögek 123,75°, 213,75°, 303,75° (1 pont).
b) A +120 fokkal való elforgatás a $\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ számmal való szorzás (1+1 pont). Az eredmény $-(1+\sqrt{3})/2 + i(-1+\sqrt{3})/2$ (1 pont).

2. a) Legyen $z = x+iy$, akkor $|z-i|^2 = x^2+(y-1)^2$ és $|z+1|^2 = (x+1)^2+y^2$, ezek mindegyike 2-vel egyenlő (1+1 pont). Innen $2x+1 = -2y+1$, azaz $y=-x$ (az i és -1 pontokat összekötő szakasz felező merőlegesének egyenlete). Ezt visszahelyettesítve két pont adódik: $(1-i)(1+\sqrt{3})/2$ és $(1-i)(1-\sqrt{3})/2$ (1 pont). Ez valójában az 1 körüli, illetve a -1 körüli $\sqrt{2}$ sugarú körök két metszéspontja.
b) Hornerrel kétszer kiemelve $x^4-2x^2+1 = (x+1)^2(x^2-2x+1)$ (1+1 pont). Mivel a -1 nem gyöke x^2-2x+1-nek, az eredeti polinomnak kétszeres gyöke (1 pont). (Közvetlenül nyilvánvaló, hogy az eredeti polinom $(x^2-1)^2$.)

3. a) A racionális gyökteszt alapján a lehetséges gyökök ± 1 és $\pm 1/3$ (1 pont). Hornerrel végigpróbálgatva csak az $1/3$ gyök, és az $(x-(1/3))(3x^2+3x+3)$ felbontás adódik (1 pont). A másodfokú egyenlet megoldóképletével számolva $3x^2+3x+3$ gyökei $(-1\pm i\sqrt{3})/2$. Ezért a gyöktényezős alak:

$$3x^3+2x^2+2x-1 = 3\Big(x-\frac{1}{3}\Big)\Big(x-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(x-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\Big)$$

(1 pont).
b) A szokásos osztási eljárással számolva a hányados x, a maradék pedig $5x+1$ (3 pont). Azaz $x^3+3x+1 = x(x^2-1)+(5x+1)$.

4. a) A rekurziós képlettel számolva

$$\Phi_{18}(x) = \frac{x^{18}-1}{\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_6\Phi_9} = \frac{x^9+1}{\Phi_2\Phi_6} = \frac{x^9+1}{x^3+1} = x^6-x^3+1\,,$$

hiszen $x^9-1 = \Phi_1\Phi_3\Phi_9$ és $\Phi_1\Phi_3 = x^3-1$ miatt $\Phi_2\Phi_6 = (x^6-1)/(x^3-1) = x^3+1$ (3 pont).

b) A Φ_{18} gyökei a hat darab primitív 18-adik egységgyök. Ezért a gyökök és együtthatók összefüggése alapján $\sigma_1 = 0$ a gyökök összege (1 pont), $\sigma_6 = (-1)^6\cdot 1 = 1$ a gyökök szorzata (1 pont), végül a négyzetösszeg $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0$, hiszen σ_2 is nulla, mert nincs x^4-es tag (1 pont).

5. a) A 175/360 egyszerűsítve 35/72. Mivel a szám hossza 1 (1 pont), ezért ε rendje a nevező, vagyis 72 (2 pont).
b) ε^k hossza 1, szöge $k\cdot 175^\circ$ (1 pont). A $k175/360 = k35/72$ nevezője akkor 8, ha k osztható 9-cel, de páratlan (2 pont). (Tehát ε^9, ε^{27}, ε^{45}, ε^{63} a jó megoldások, mert $\varepsilon^{81} = \varepsilon^9$-től kezdve ezek a hatványok ismétlődnek. Ezek valójában a primitív 8-adik egységgyökök, mint a 4 darab.) Az is 3 pontot ér, ha valaki a fenti számolás helyett azt mutatja meg, hogy mind a négy primitív nyolcadik egységgyök hatványa ε-nak.

6. A polinomba behelyettesítve $b_j^3 - b_j + 1 = 0$. Ezt b_j-vel szorozva és $j = 1,2,3$-ra összeadva $b_1^4+b_2^4+b_3^4 = (b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(b_1+b_2+b_3)$ (valójában az első Newton-Girard-formulát alkalmaztuk). Az egyenletből leolvasható, hogy $\sigma_1 = 0$ és $\sigma_2 = -1$, ezért az eredmény $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 - \sigma_1 = 2$.