BSc algebra1 alap- és középszintű gyakorlat

Első zárthelyi (2006. okt. 24.) — eredmények (Φ_{44}-es változat)

1. a) A szokásos osztási eljárással számolva a hányados $(1/3)x^2-(1/9)$, a maradék $10/9$ (3 pont). b) A négyzetösszeg $\sigma_1^2-2\sigma_2$ (0 pont). A gyökök és együtthatók összefüggése alapján $\sigma_1=i/3$ (1 pont) és $\sigma_2=3c/3=c$ (1 pont). Ezért a négyzetösszeg akkor nulla, ha $(i/3)^2=2c$, azaz $c=-1/18$ (1 pont).

2. a) A $+30$ fokkal való elforgatás a $\cos 30°+i\sin 30°=\sqrt{3}/2+i/2$ számmal való szorzás (1+1 pont). Az eredmény $(1+\sqrt{3})/2+i(1-\sqrt{3})/2$ képzetes része, azaz $(1-\sqrt{3})/2$ (1 pont).
b) Legyen $z=x+iy$, ekkor $|z+2i|^2=x^2+(y+2)^2$ és $\mathrm{Re}(z+3i)=x$ (1 pont). Ezért $x^2+(y+2)^2=x^2$, ahonnan $y+2=0$ (1 pont). Az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve $|z+2i|=|x|=\mathrm{Re}(z+3i)=x$, ami akkor teljesül, ha $x\geq 0$. Ezért a keresett halmaz a valós tengellyel párhuzamos, a $-2i$ pontból a pozitív irányba induló **fél**egyenes (1 pont).

3. A trigonometrikus alak $(1-i\sqrt{3})/2=\cos 300°+i\sin 300°$ (2 pont). E szám hatodik gyökeinek hossza 1, a szögek rendre 50°, 110°, 170°, 230°, 290°, 350° (2 pont, hibánként 1 pont levonás). Az első esetben $50/360=5/36$, ezért a rend 36. A többi szám rendje ugyanilyen számolással szintén 36-nak adódik (2 pont, hibánként 1 pont levonás). *Második megoldás:* A $\cos 300°+i\sin 300°$ rendje 6. A hatvány rendjének képletéből elemi számelméleti megfontolásokkal, annak felhasználásával, hogy $6\mid 6$, leolvasható, hogy mindegyik hatodik gyöknek a rendje $6\cdot 6$.

4. a) A racionális gyökteszt alapján a lehetséges gyökök $\pm 1, \pm 1/7, \pm 1/49$ (1 pont). Hornerrel végigpróbálgatva az $1/7$ gyök (1 pont), amelyhez tartozó gyöktényező kétszer emelhető ki, és az eredmény $(x-(1/7))^2(49x^2+49x+49)$ (1+1 pont). A másodfokú egyenlet megoldóképletével számolva x^2+x+1 gyökei $(-1\pm i\sqrt{3})/2$ (1 pont). Ezért a gyöktényezős alak:

$$49x^4+35x^3+36x^2-13x+1=49\Big(x-\frac{1}{7}\Big)^2\Big(x-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(x-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\Big)\ \text{(1 pont).}$$

5. a) A rekurziós képlettel számolva

$$\Phi_{44}(x)=\frac{x^{44}-1}{\Phi_1\Phi_2\Phi_4\Phi_{11}\Phi_{22}}=\frac{x^{22}+1}{\Phi_4(x)}=\frac{(x^2)^{11}+1}{x^2+1}=x^{20}-x^{18}+\ldots+1\,.$$

Ezért a keresett együtthatók rendre 0, 1, 0, 1 (6 pont). *Második megoldás:* a Φ_{44} polinom foka $\varphi(44)=\varphi(4)\varphi(11)=20$ (1 pont), ezért x^{44} együtthatója nulla, és x^{20} együtthatója a főegyüttható, ami 1 (1 pont). A konstans tag a primitív 44-edik egységgyökök szorzata, ami 1 (párosítsuk mindegyiket az inverzével, 2 pont), az x^{19} együtthatója pedig azért nulla, mert egy 44 rendű szám ellentettjének a rendje is 44 (lásd 1.5.19), és így a primitív 44-edik egységgyökök összege nulla (2 pont).

6. A feladatban szereplő szimmetrikus polinom legyen g. A tagjainak száma $20=5\cdot 4$, hiszen ötféleképpen választhatjuk ki azt az x_i-t, ami a négyzeten szerepel, és ettől függetlenül négyféleképpen azt az x_m-et, ami az adott tagban nem szerepel (2 pont). A főtag $x_1^2x_2x_3x_4$, ezért az első lépésben $\sigma_1\sigma_4$-et kell kivonni (1 pont). A beszorzást elvégezve $\sigma_1\sigma_4=g+5x_1x_2x_3x_4x_5$. Ezért $g=\sigma_1\sigma_4-5\sigma_5$ (3 pont). A gyökök és együtthatók összefüggése alapján a végeredmény -15 (1 pont). *Második megoldás:* Nyilván g/σ_5 az összes x_i/x_j összege, ahol $i\neq j$. De ez a hányados 1-től különböző ötödik egységgyök (hiszen az x^5+2 gyökei egymásnak ötödik egységgyökszörösei). Ezeknek az egységgyököknek az összege -1. A szimmetria miatt a 20 tagú összegben mind a négy ilyen egységgyök ötször szerepel. Ezért g/σ_5 értéke -5.