

BSc algebra1 alap- és középszintű gyakorlat

Első zárthelyi (2006. okt. 24.) — eredmények (Φ_{76} -os változat)

1. a) A szokásos osztási eljárással számolva a hányados $(1/2)x^2 - (1/4)$, a maradék $5/4$ (3 pont).
b) A négyzetösszeg $\sigma_1^2 - 2\sigma_2$ (0 pont). A gyökök és együtthatók összefüggése alapján $\sigma_1 = i/3$ (1 pont) és $\sigma_2 = 2c/3$ (1 pont). Ezért a négyzetösszeg akkor nulla, ha $(i/3)^2 = 4c/3$, azaz $c = -1/12$ (1 pont).
2. a) A $+60$ fokkal való elforgatás a $\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ számmal való szorzás (1+1 pont). Az eredmény $(-1 - \sqrt{3})/2 + i(1 - \sqrt{3})/2$ képzetes része, azaz $(1 - \sqrt{3})/2$ (1 pont).
b) Legyen $z = x + iy$, ekkor $|z - 4i|^2 = x^2 + (y - 4)^2$ és $\operatorname{Re}(z + 3i) = x$ (1 pont). Ezért $x^2 + (y - 4)^2 = x^2$, ahonnan $y - 4 = 0$ (1 pont). Az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve $|z - 4i| = |x| = \operatorname{Re}(z + 3i) = x$, ami akkor teljesül, ha $x \geq 0$. Ezért a keresett halmaz a valós tengellyel párhuzamos, a $4i$ pontból a pozitív irányba induló félegyenes (1 pont).
3. A trigonometrikus alak $(-\sqrt{3} + i)/2 = \cos 150^\circ + i \sin 150^\circ$ (2 pont). E szám hatodik gyökeinek hossza 1, a szögek rendre $25^\circ, 85^\circ, 145^\circ, 205^\circ, 265^\circ, 325^\circ$ (2 pont, hibánként 1 pont levonás). Az első esetben $25/360 = 5/72$, ezért a rend 72. A többi szám rendje ugyanilyen számolással szintén 72-nek adódik (2 pont, hibánként 1 pont levonás). *Második megoldás:* A $\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ$ rendje 12. A hatvány rendjének képletéből elemi számelméleti megfontolásokkal, annak felhasználásával, hogy $6 \mid 12$, leolvasható, hogy mindegyik hatodik gyöknek a rendje $6 \cdot 12$.
4. a) A racionális gyökteszt alapján a lehetséges gyökök $\pm 1, \pm 1/3, \pm 1/9$ (1 pont). Hornerrel végigpróbálgatva a $-1/3$ gyök (1 pont), amelyhez tartozó gyöktényező kétszer emelhető ki, és az eredmény $(x + (1/3))^2(9x^2 - 9x + 9)$ (1+1 pont). A másodfokú egyenlet megoldóképletével számolva $x^2 - x + 1$ gyökei $(1 \pm i\sqrt{3})/2$ (1 pont). Ezért a gyöktényezőzős alak:

$$9x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \left(x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \quad (1 \text{ pont}).$$

5. a) A rekurziós képlettel számolva

$$\Phi_{76}(x) = \frac{x^{76} - 1}{\Phi_1 \Phi_2 \Phi_4 \Phi_{19} \Phi_{38}} = \frac{x^{38} + 1}{\Phi_4(x)} = \frac{(x^2)^{19} + 1}{x^2 + 1} = x^{36} - x^{34} + \dots + 1.$$

Ezért a keresett együtthatók rendre 0, 1, 0, 1 (6 pont). *Második megoldás:* a Φ_{76} polinom foka $\varphi(76) = \varphi(4)\varphi(19) = 36$ (1 pont), ezért x^{76} együtthatója nulla, és x^{36} együtthatója a főegyüttható, ami 1 (1 pont). A konstans tag a primitív 76-odik egységgyökök szorzata, ami 1 (párosítsuk mindegyiket az inverzével, 2 pont), az x^{35} együtthatója pedig azért nulla, mert egy 76 rendű szám ellentettjének a rendje is 76 (lásd 1.5.19), és így a primitív 76-odik egységgyökök összege nulla (2 pont).

6. A feladatban szereplő szimmetrikus polinom legyen g . A tagjainak száma $20 = 5 \cdot 4$, hiszen ötféleképpen választhatjuk ki azt az x_i -t, ami a négyzeten szerepel, és ettől függetlenül négyféleképpen azt az x_m -et, ami az adott tagban nem szerepel (2 pont). A főtag $x_1^2 x_2 x_3 x_4$, ezért az első lépésben $\sigma_1 \sigma_4$ -et kell kivonni (1 pont). A beszorzást elvégezve $\sigma_1 \sigma_4 = g + 5x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$. Ezért $g = \sigma_1 \sigma_4 - 5\sigma_5$ (3 pont). A gyökök és együtthatók összefüggése alapján a végeredmény 15 (1 pont). *Második megoldás:* Nyilván g/σ_5 az összes x_i/x_j összege, ahol $i \neq j$. De ez a hányados 1-től különböző ötödik egységgyök (hiszen az $x^5 + 2$ gyökei egymásnak ötödik egységgyökszörösei). Ezeknek az egységgyököknek az összege -1 . A szimmetria miatt a 20 tagú összegben mind a négy ilyen egységgyök ötször szerepel. Ezért g/σ_5 értéke -5 .