BSc algebra1 alap- és középszintű gyakorlat

Első zárthelyi (2006. okt. 24.) — eredmények (Φ_{52}-es változat)

1. a) A szokásos osztási eljárással számolva a hányados $(1/3)x^2 + (1/9)$, a maradék $10/9$ (3 pont). b) A négyzetösszeg $\sigma_1^2 - 2\sigma_2$ (0 pont). A gyökök és együtthatók összefüggése alapján $\sigma_1 = i/2$ (1 pont) és $\sigma_2 = 3c/2$ (1 pont). Ezért a négyzetösszeg akkor nulla, ha $(i/2)^2 = 3c$, azaz $c = -1/12$ (1 pont).

2. a) A $+60$ fokkal való elforgatás a $\cos 60° + i \sin 60° = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ számmal való szorzás (1+1 pont). Az eredmény $(-1+\sqrt{3})/2 + i(-1-\sqrt{3})/2$ képzetes része, azaz $(-\sqrt{3}-1)/2$ (1 pont). b) Legyen $z = x+iy$, ekkor $|z-3i|^2 = x^2+(y-3)^2$ és $\mathrm{Re}(z+2i) = x$ (1 pont). Ezért $x^2+(y-3)^2 = x^2$, ahonnan $y-3 = 0$ (1 pont). Az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve $|z-3i| = |x| = \mathrm{Re}(z+2i) = x$, ami akkor teljesül, ha $x \geq 0$. Ezért a keresett halmaz a valós tengellyel párhuzamos, a $3i$ pontból a pozitív irányba induló **fél**egyenes (1 pont).

3. A trigonometrikus alak $(-\sqrt{3}-i)/2 = \cos 210° + i \sin 210°$ (2 pont). E szám hatodik gyökeinek hossza 1, a szögek rendre 35°, 95°, 155°, 215°, 275°, 335° (2 pont, hibánként 1 pont levonás). Az első esetben $35/360 = 7/72$, ezért a rend 72. A többi szám rendje ugyanilyen számolással szintén 72-nek adódik (2 pont, hibánként 1 pont levonás). *Második megoldás:* A $\cos 210° + i \sin 210°$ rendje 12. A hatvány rendjének képletéből elemi számelméleti megfontolásokkal, annak felhasználásával, hogy $6 \mid 12$, leolvasható, hogy mindegyik hatodik gyöknek a rendje $6 \cdot 12$.

4. a) A racionális gyökteszt alapján a lehetséges gyökök $\pm 1, \pm 1/5, \pm 1/25$ (1 pont). Hornerrel végigpróbálgatva a $-1/5$ gyök (1 pont), amelyhez tartozó gyöktényező kétszer emelhető ki, és az eredmény $(x + (1/5))^2(25x^2 - 25x + 25)$ (1+1 pont). A másodfokú egyenlet megoldóképletével számolva $x^2 - x + 1$ gyökei $(1 \pm i\sqrt{3})/2$ (1 pont). Ezért a gyöktényezős alak:

$$25x^4 - 15x^3 + 16x^2 + 9x + 1 = 25\Big(x + \frac{1}{5}\Big)^2 \Big(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\Big) \text{ (1 pont).}$$

5. a) A rekurziós képlettel számolva

$$\Phi_{52}(x) = \frac{x^{52}-1}{\Phi_1\Phi_2\Phi_4\Phi_{13}\Phi_{26}} = \frac{x^{26}+1}{\Phi_4(x)} = \frac{(x^2)^{13}+1}{x^2+1} = x^{24} - x^{22} + \ldots + 1\,.$$

Ezért a keresett együtthatók rendre 0, 1, 0, 1 (6 pont). *Második megoldás:* a Φ_{52} polinom foka $\varphi(52) = \varphi(4)\varphi(13) = 24$ (1 pont), ezért x^{52} együtthatója nulla, és x^{23} együtthatója a főegyüttható, ami 1 (1 pont). A konstans tag a primitív 56-odik egységgyökök szorzata, ami 1 (párosítsuk mindegyiket az inverzével, 2 pont), az x^{23} együtthatója pedig azért nulla, mert egy 56 rendű szám ellentettjének a rendje is 56 (lásd 1.5.19), és így a primitív 56-odik egységgyökök összege nulla (2 pont).

6. A feladatban szereplő szimmetrikus polinom legyen g. A tagjainak száma $20 = 5 \cdot 4$, hiszen ötféleképpen választhatjuk ki azt az x_i-t, ami a négyzeten szerepel, és ettől függetlenül négyféleképpen azt az x_m-et, ami az adott tagban nem szerepel (2 pont). A főtag $x_1^2 x_2 x_3 x_4$, ezért az első lépésben $\sigma_1\sigma_4$-et kell kivonni (1 pont). A beszorzást elvégezve $\sigma_1\sigma_4 = g + 5x_1x_2x_3x_4x_5$. Ezért $g = \sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_5$ (3 pont). A gyökök és együtthatók összefüggése alapján a végeredmény -10 (1 pont). *Második megoldás:* Nyilván g/σ_5 az összes x_i/x_j összege, ahol $i \neq j$. De ez a hányados 1-től különböző ötödik egységgyök (hiszen az x^5+2 gyökei egymásnak ötödik egységgyökszörösei). Ezeknek az egységgyököknek az összege -1. A szimmetria miatt a 20 tagú összegben mind a négy ilyen egységgyök ötször szerepel. Ezért g/σ_5 értéke -5.