BSc algebra1 alap- és középszintű gyakorlat

Első zárthelyi (2006. okt. 24.) — eredmények (Φ_{28}-as változat)

1. a) A szokásos osztási eljárással számolva a hányados $(1/2)x^2 + (1/4)$, a maradék $5/4$ (3 pont).
b) A négyzetösszeg $\sigma_1^2 - 2\sigma_2$ (0 pont). A gyökök és együtthatók összefüggése alapján $\sigma_1 = i/2$ (1 pont) és $\sigma_2 = 2c/2 = c$ (1 pont). Ezért a négyzetösszeg akkor nulla, ha $(i/2)^2 = 2c$, azaz $c = -1/8$ (1 pont).

2. a) A $+60$ fokkal való elforgatás a $\cos 60° + i \sin 60° = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ számmal való szorzás (1+1 pont). Az eredmény $(1 + \sqrt{3})/2 + i(-1 + \sqrt{3})/2$ képzetes része, azaz $(\sqrt{3} - 1)/2$ (1 pont).
b) Legyen $z = x+iy$, ekkor $|z-2i|^2 = x^2+(y-2)^2$ és $\mathrm{Re}(z+i) = x$ (1 pont). Ezért $x^2+(y-2)^2 = x^2$, ahonnan $y-2 = 0$ (1 pont). Az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve $|z-2i| = |x| = \mathrm{Re}(z+i) = x$, ami akkor teljesül, ha $x \geq 0$. Ezért a keresett halmaz a valós tengellyel párhuzamos, a $2i$ pontból a pozitív irányba induló **fél**egyenes (1 pont).

3. A trigonometrikus alak $(\sqrt{3} - i)/2 = \cos 330° + i \sin 330°$ (2 pont). E szám hatodik gyökeinek hossza 1, a szögek rendre 55°, 115°, 175°, 235°, 295°, 355° (2 pont, hibánként 1 pont levonás). Az első esetben $55/360 = 11/72$, ezért a rend 72. A többi szám rendje ugyanilyen számolással szintén 72-nek adódik (2 pont, hibánként 1 pont levonás). *Második megoldás:* A $\cos 330° + i \sin 330°$ rendje 12. A hatvány rendjének képletéből elemi számelméleti megfontolásokkal, annak felhasználásával, hogy $6 \mid 12$, leolvasható, hogy mindegyik hatodik gyöknek a rendje $6 \cdot 12$.

4. a) A racionális gyökteszt alapján a lehetséges gyökök $\pm 1, \pm 1/7, \pm 1/49$ (1 pont). Hornerrel végigpróbálgatva a $-1/7$ gyök (1 pont), amelyhez tartozó gyöktényező kétszer emelhető ki, és az eredmény $(x + (1/7))^2(49x^2 - 49x + 49)$ (1+1 pont). A másodfokú egyenlet megoldóképletével számolva $x^2 - x + 1$ gyökei $(1 \pm i\sqrt{3})/2$ (1 pont). Ezért a gyöktényezős alak:

$$49x^4 - 35x^3 + 36x^2 + 13x + 1 = 49\Big(x + \frac{1}{7}\Big)^2 \Big(x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\Big) \text{ (1 pont).}$$

5. a) A rekurziós képlettel számolva

$$\Phi_{28}(x) = \frac{x^{28} - 1}{\Phi_1\Phi_2\Phi_4\Phi_7\Phi_{14}} = \frac{x^{14} + 1}{\Phi_4(x)} = \frac{(x^2)^7 + 1}{x^2 + 1} = x^{12} - x^{10} + \ldots + 1\,.$$

Ezért a keresett együtthatók rendre 0, 1, 0, 1 (6 pont). *Második megoldás:* a Φ_{28} polinom foka $\varphi(28) = \varphi(4)\varphi(7) = 12$ (1 pont), ezért x^{28} együtthatója nulla, és x^{12} együtthatója a főegyüttható, ami 1 (1 pont). A konstans tag a primitív 28-adik egységgyökök szorzata, ami 1 (párosítsuk mindegyiket az inverzével, 2 pont), az x^{11} együtthatója pedig azért nulla, mert egy 28 rendű szám ellentettjének a rendje is 28 (lásd 1.5.19), és így a primitív 28-adik egységgyökök összege nulla (2 pont).

6. A feladatban szereplő szimmetrikus polinom legyen g. A tagjainak száma $20 = 5 \cdot 4$, hiszen ötféleképpen választhatjuk ki azt az x_i-t, ami a négyzeten szerepel, és ettől függetlenül négyféleképpen azt az x_m-et, ami az adott tagban nem szerepel (2 pont). A főtag $x_1^2x_2x_3x_4$, ezért az első lépésben $\sigma_1\sigma_4$-et kell kivonni (1 pont). A beszorzást elvégezve $\sigma_1\sigma_4 = g + 5x_1x_2x_3x_4x_5$. Ezért $g = \sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_5$ (3 pont). A gyökök és együtthatók összefüggése alapján a végeredmény 10 (1 pont). *Második megoldás:* Nyilván g/σ_5 az összes x_i/x_j összege, ahol $i \neq j$. De ez a hányados 1-től különböző ötödik egységgyök (hiszen az $x^5 + 2$ gyökei egymásnak ötödik egységgyökszörösei). Ezeknek az egységgyököknek az összege -1. A szimmetria miatt a 20 tagú összegben mind a négy ilyen egységgyök ötször szerepel. Ezért g/σ_5 értéke -5.