Bsc algebra1

Részletes vizsgatematika (2006 ősz)

A vizsga anyaga az, ami az előadáson (és részben a gyakorlaton) szerepelt, és az alábbiakban olvasható. A tanuláshoz hasznosak a gyakorlatokon szerepelt feladatsorok is! A klasszikus algebrai részből Kiss Emil: *Bevezetés az absztrakt algebrába* című jegyzete szellemében is és tartalmában is szorosan kapcsolódik az előadáshoz. Lineáris algebrából Freud Róbert: *Lineáris algebra* (egyetemi tankönyv) a leginkább ajánlott segédanyag, mert ez elemi szinten tárgyalja a fogalmakat, és bőséges példaanyaggal rendelkezik. Az alábbi tematikában az L betű a Freud-könyvre, a többi hivatkozás a Kiss-jegyzetre utal. Az NB jelentése: a bizonyítást nem kell tudni.

Az anyagot a gyakorlaton, az ottani feladatok segítségével kell megérteni, és utána sokszor át kell venni! Először a legelemibb módon, a legkonkrétabb esetekben értsük meg a fogalmakat, számolásokat. A későbbi ismétlések során egyre magasabbról láthatjuk az állításokat, egyre mélyebb összefüggéseket fedezhetünk fel. Például a polinomokra, mátrixokra, determinánsokra vonatkozó tételeket először konkrét testek ($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$) fölött gondoljuk végig. Ha egy absztrakt fogalmat akarunk megérteni, akkor előbb konkrét eseteket vizsgáljunk (például a determináns képletét $n = 3$-ra, és valós fölött).

Az anyagban számos rutinbizonyítás van (például: a komplex konjugálás szorzattartó, a polinomok gyűrűt alkotnak, a determináns mindegyik oszlopában összegtartó). Ezeket nem célszerű külön-külön megtanulni, hanem *az ilyen bizonyítások kitalálásának a módszerét kell elsajátítani.* Általában mindössze azt kell tenni, hogy az új fogalmakat a definíciójuk segítségével kiküszöböljük. A legtöbb esetben egyetlen olyan irány van, amerre továbbléphetünk, és a végén automatikusan kijön az állítás. Ezt a készséget úgy lehet elsajátítani, hogy az ilyen állítások közül belátunk annyit, amennyi szükséges ahhoz, hogy a dolog magától menjen.

A nehezebb tételeket úgy tanuljuk, hogy próbáljuk meg az állítást magunk bebizonyítani. A rutinlépéseket megtéve valahol elakadunk: ez a megoldás első ötlete. Miután ezt megtaláltuk a jegyzetünkben, folytassuk a próbálkozást. Amikor a bizonyítás végére értünk, előttünk áll az ötletek listája, elég ezeket megtanulni. Pár nap múlva ismét próbáljuk meg felidézni a bizonyítást, ekkor kibuknak azok a részletek, amiket elsőre nem értettünk meg rendesen. Mindez egy fontos lépcső ahhoz, hogy megtanuljuk, hogyan kell *tetszőleges, extra előismeretet nem igénylő matematika-könyvet önállóan megemészteni.*

A vizsga irásbeli lesz, az időpontok az ETR-ben olvashatók. Minden vizsgán 72 fő a limit, ha ez az adott vizsganapon nem elegendő, akkor azon a napon lesz egy második turnus is, szinten 72 fős limittel. Aki valamilyen okból nem tud jöni vizsgázni, **minél hamarabb jelentkezzen ki az ETR-ből,** (ezzel a többi vizsgázónak segít), de a halasztások miatt nem lesz új vizsganap! A vizsga első felében egy óra alatt 30 könnyű kérdésre kell válaszolni, ezek a fogalmak, tételek, bizonyítások megértését vizsgálják. Aki itt elér legalább 50%-ot, annak a vizsgája már sikeres, a többieké sajnos elégtelen. A vizsga második felében harminc perc alatt 5 kérdésre kell válaszolni, ezek az anyag nehezebb részeiből vannak. Egy minta vizsgadolgozat letölthető a `http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/` címről. Itt olvashatók a **konzultációs időpontok** is.

További három oldal!

Absztrakt algebrai alapfogalmak. (Lásd 2.2. Szakasz.) Művelet, asszociativitás, kommutativitás. Egységelem, bal- és jobbinverz, inverz, ezek egyértelműsége. Egész kitevőjű hatványok és tulajdonságaik, többszörös.

Gyűrű; kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrű; ferdetest, test. Elemi számolási szabályok. Gyűrűelem egész számszorosa. Invertálható elem egységelemes gyűrűben. Nullosztómentes gyűrűben szabad egyszerűsíteni. Minden test nullosztómentes.

Összeadás és szorzás mod m (1.1. Szakasz). A $\mathbb{Z}_m$ invertálható elemei pontosan az m-hez relatív prím elemek. A $\mathbb{Z}_m$ gyűrű akkor és csak akkor nullosztómentes ha test, akkor és csak akkor, ha m prím.

A binomiális együtthatók alaptulajdonságai, a binomiális tétel (NB, 2.2.42. Gyakorlat). Ha minden elem p-szerese nulla egy gyűrűben (p prím), akkor itt tagonként lehet p-edik hatványra emelni. Következmény: a kis-Fermat tétel (3.3.20. Feladat).

A permutáció fogalma (mint bijektív leképezés). Permutációk kompozíciója, inverze. Transzpozíció, minden permutáció cserék szorzata. Az inverzió fogalma, permutáció paritása (előjele). Szorzat előjele az előjelek szorzata (NB). Következmények: inverz előjele, minden transzpozíció páratlan permutáció, a páros permutációk száma (4.2. Szakasz).

Komplex számok. (Lásd 1. Fejezet.) A komplex számok (mint $a+bi$ alakú formális kifejezések, ahol $i^2=-1$). Az $a+bi$ előállítás egyértelmű, valós és képzetes rész. Összeadás, kivonás, szorzás, konjugált, abszolút érték, tulajdonságaik, kapcsolatuk. Minden nem nulla komplex számmal lehet osztani, a komplex számok testet alkotnak. Nullosztómentesség. A komplex számsík, komplex szám argumentuma (szöge) és trigonometrikus alakja. Összeadás, mint vektorösszeadás. Szorzás és osztás trigonometrikus alakban. Egyes geometriai transzformációk kifejezése komplex számokkal. A háromszög-egyenlőtlenség (geometriai bizonyítással).

Komplex szám rendje: a különböző hatványainak a száma (1.5. Szakasz). Ha nem minden hatvány különböző, akkor a rend véges, és a hatványok periodikusan ismétlődnek. A rend a legkisebb pozitív egész, melyre a számot emelve 1-et kapunk. Egy szám két hatványa akkor és csak akkor egyenlő, ha a kitevők különbsége a rendnek többese. Végtelen rendű szám hatványai páronként különbözők. Képlet a hatvány rendjére.

A komplex egységgyökök, mint $\mathbb{C}$ véges rendű elemei. Trigonometrikus alakjuk, számuk. Az n-ed rendű elemek neve: primitív n-edik egységgyök. Ezek éppen azok a számok, melyek hatványai pontosan az összes n-edik egységgyököket adják. Jellemzésük a trigonometrikus alak segítségével, számuk. Gyökvonás komplex számból, az n-edik gyökök meghatározása és geometriai elhelyezkedése.

Polinomok. Kommutatív, egységelemes gyűrű fölötti polinom, mint formális kifejezés. Polinomok egyenlősége, együtthatói, konstans tagja, főtagja, főegyütthatója, normált polinom. Összeadás, nullapolinom, kivonás, szorzás. Polinomgyűrű, ez is kommutatív, egységelemes gyűrű. Nem nulla polinom foka, a fokszám változása a műveleteknél. Ha R nullosztómentes, kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor $R[x]$ is az (2.1 és 2.3. Szakasz).

A polinomfüggvény fogalma. Polinom gyöke, a Horner-elrendezés, a gyöktényező kiemelhetősége. Nullosztómentes gyűrű fölött a különböző gyökökhöz tartozó gyöktényezők egyszerre is kiemelhetők, a gyöktényezős alak egyértelműsége, a gyökök maximális száma, a polinomok azonossági tétele. Végtelen gyűrű fölött a polinomfüggvények és a polinomok kapcsolata kölcsönösen egyértelmű, de véges gyűrű fölött nem. Példa kommutatív, nem nullosztómentes gyűrű fölötti polinomra, melynek több gyöke van, mint a foka. Az algebra alaptétele (NB): $\mathbb{C}$ fölött minden nem konstans polinomnak van gyöke. Gyök multiplicitása. Egy n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva pontosan n komplex gyöke van (2.4 és 2.5. Szakasz). A racionális gyökteszt (3.3.9. Tétel). A Lagrange-interpoláció (2.4.12. Gyakorlat).

Az egységelemes, kommutatív gyűrű fölötti többhatározatlanú polinom fogalma. Fok, homogén polinom, felbontás homogén polinomok összegére. A tagok lexikografikus rendezése. Nullosztómentesség, a szorzat foka (2.6. Szakasz). A gyökök és együtthatók összefüggése, az elemi szimmetrikus polinomok. A szimmetrikus polinomok alaptétele, az egyértelműség NB. Hatványösszegek, a Newton-Girard formulák (NB, 2.7. Szakasz).

A számelmélet alaptétele. Számelméleti fogalmak egységelemes, kommutatív, nullosztómentes gyűrűben: oszthatóság, egység, felbonthatatlan, prímelem, kitüntetett közös osztó, ennek egyértelműsége (3.1. Szakasz).

A polinomgyűrű egységei (3.1.11. Gyakorlat). Egységelemes, kommutatív, nullosztómentes gyűrű fölött minden olyan polinommal lehet maradékosan osztani, amelynek a főegyütthatója invertálható. A maradékos osztás egyértelmű. Test fölötti polinomgyűrűben a $\mathbb{Z}$ mintájára belátható a számelmélet alaptétele: euklideszi algoritmus, a kitüntetett közös osztó, a felbonthatatlan (irreducibilis) és a prímtulajdonságú elemek viszonya (3.2. Szakasz).

Test fölött az irreducibilis polinomok azok a nem konstans polinomok, melyek nem bonthatók alacsonyabb fokúak szorzatára. Minden elsőfokú polinom irreducibilis; a másod- és harmadfokúak pontosan akkor irreducibilisek, ha nincs az alaptestben gyökük. Ha egy legalább másodfokú polinomnak van az alaptestben gyöke, akkor nem irreducibilis (de ha nincs gyöke, lehet reducibilis). Az irreducibilis polinomok $\mathbb{C}$ fölött az elsőfokúak. Egy $\mathbb{R}$ fölötti polinomnak minden komplex szám ugyanannyiszoros gyöke, mint a konjugáltja. Páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke. Az $\mathbb{R}$ fölötti irreducibilis polinomok az elsőfokúak, és azok a másodfokúak, melyeknek diszkriminánsa negatív (3.3. Szakasz).

$\mathbb{Z}[x]$ számelmélete (3.4. Szakasz). **Az ebben a bekezdésben szereplő állítások egy része csak középszinten szerepelt, ezeket, továbbá a bizonyításokat az elégségeshez nem kell tudni.** Gauss Lemma I: ha $p \in \mathbb{Z}$ prím, akkor $\mathbb{Z}[x]$-ben is prím, mint konstans polinom. A primitív polinom fogalma, primitív polinomok szorzata is primitív. Gauss Lemma II: egész együtthatós polinom $\mathbb{Q}$ fölötti felbontása $\mathbb{Z}$ fölötti felbontássá módosítható. $\mathbb{Z}[x]$-ben az irreducibilis polinomok a $\mathbb{Z}$-ben felbonthatatlan konstansok, valamint a $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis primitív polinomok. $\mathbb{Z}[x]$ alaptételes. Általánosítás: ha R alaptételes, akkor $R[x]$ is az. Következmény: $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ és $T[x_1, \ldots, x_n]$ alaptételes, ahol T test.

A Schönemann-Eisenstein kritérium $\mathbb{Q}$ fölötti irreducibilitásra. Következmény: $\mathbb{Q}$ fölött akárhányad fokú irreducibilis polinom létezik. Módszerek az irreducibilitás eldöntésére (3.5. Szakasz).

A körosztási polinom definíciója, rekurzív képlete, ez egész együtthatós. A körosztási polinom irreducibilitása $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ fölött (NB, 3.9. Szakasz, és az ezt követő feladatok).

A harmadfokú egyenlet, Cardano képlete, a köbgyökvonás helyes elvégzése, Casus Irreducibilis (NB, 3.7 és 3.8. Szakasz).

A determináns. (Lásd L1.2-1.5). A determináns alaptulajdonságai: minden oszlopában lineáris, ha két oszlop egyenlő, a determináns értéke nulla (lásd L9.8 is). Következmény: a determináns oszlopcserénél előjelet vált, egy oszlophoz egy másik oszlop skalárszorosát adva a determináns értéke nem változik. A transzponált mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával, így az oszlopokra bizonyított tulajdonságok sorokra is érvényesek. Felső háromszögmátrix determinánsa, a determináns kiszámítása Gauss-eliminációval. A determináns definíciója. Az előjeles aldetermináns fogalma, a kifejtési tétel (NB). A Vandermonde-determináns. A determinánsok szorzástétele (NB, LF9.8.4).

Lineáris algebra. A lineáris egyenletrendszer fogalma és megoldása Gauss-eliminációval. Vezéregyesek, tilos sorok, szabad és kötött változók, a megoldások általános képlete és száma. Az egyetlen összefüggés az ismeretlenek száma, az egyenletek száma, és a megoldások száma között: ha kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor nem lehet egyértelmű a megoldás. Homogén lineáris egyenletrendszer, triviális megoldás, ha kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor van nemtriviális megoldás. A Cramer-szabály. (L3.1.)

A sík vektorai, helyvektorok, összeadás és skalárral szorzás. Egy T test fölötti oszlopvektorok, összeadás, skalárral szorzás. A sík origót fixáló egybevágósági (és hasonlósági) transzformációi összeg- és skalárszoros-tartók (NB). A sík lineáris transzformációinak megadása mátrix segítségével. Vektor képének kiszámítása, mátrix és vektor szorzata. Kompozíció mátrixa, mátrixok szorzása. A mátrixszorzás asszociativitása (annak következménye, hogy a leképezések kompozíciója asszociatív). Az egységmátrix és az inverz mátrix fogalma. Mátrixok összeadása, és skalárral szorzása. A mátrix-műveletek tulajdonságai, az $n \times n$-es mátrixok egységelemes gyűrűt alkotnak. A ferde kifejtési tétel, az inverz mátrix képlete. Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla. Következmény: $MN = I$ akkor és csak akkor, ha $NM = I$. Invertálás Gauss-eliminációval (L2.1, 2.2. 3.5).

Vektorrendszer lineáris függetlensége. A determináns akkor és csak akkor nulla, ha az oszlopvektorai lineárisan összefüggőek (NB). Vektorrendszer rangja. Mátrix sor- és oszloprangja, ezek megegyeznek (NB). Szorzatmátrix rangja (NB). A rang kiszámítása Gauss-eliminációval. (L3.3, 3.4).