

Bsc algebra1 vizsga
Minta — eredmények

Első rész

1. Mennyi $i(6 - 2i)$ képzetes része? 6
2. Ha z szöge 30° , mennyi z^{-2} (0° és 360° közötti) szöge? 300°
3. Ha $|z| = 2$, akkor $|\bar{z}^3|$ mennyi? 2^3
4. Mennyi -16 negyedik gyökének a hossza? 2
5. Hányadik primitív egységgyök a $-i$? 4
6. Ha ε rendje 120, akkor mennyi $o(\varepsilon^{14})$? 60
7. Mennyi $-3x^5 + 2x + 6$ főtagjának és főegyütthatójának hányadosa? x^5
8. Adjunk példát két olyan másodfokú polinomra, melyek összege nulladfokú.
 x^2 és $-x^2 + 1$
9. Adjunk meg egy olyan polinomot, amelynek az i kétszeres, a $-i$ háromszoros gyöke.
 $(x - i)^2(x + i)^3$
10. Hány komplex gyöke van multiplicitásokkal együtt az $x^6 + 3x + 1$ polinomnak? 6
(Az algebra alaptétele miatt.)
11. Mi $x^4 - 1$ gyöktényezői alakja? $(x + 1)(x - 1)(x + i)(x - i)$
12. Mi $x_1^2x_2^3 + x_1x_2^3 + x_1^3$ főtagja? x_1^3
13. Mennyi az előző kérdésben szereplő polinom foka? 5
14. Írjuk föl a köbösszegre vonatkozó, négyváltozós Newton–Girard-formulát.
 $s_3 - \sigma_1s_2 + \sigma_2s_1 - 3\sigma_3 = 0$
15. Mik az egységek $\mathbb{Z}[x]$ -ben? ± 1
16. Ha $\mathbb{R}[x]$ -ben $x^3 + 1$ -et osztjuk $2x + 2$ -vel, mi a maradék? 0
(Nem kell osztani, csak észrevenni, hogy a -1 gyöke $x^3 + 1$ -nek.)
17. Melyik az a valós együtthatós, normált, negyedfokú polinom, amelynek az $1 + i$ kétszeres gyöke? $(x - 1 - i)^2(x - 1 + i)^2 = (x^2 - 2x + 2)^2$ (hiszen a konjugált is gyök)
18. Az $x^3 + px + q$ -ra felírt Cardano-képletben mi a két köbgyök szorzata? $-p/3$
19. Adjunk példát olyan hatodfokú, egész együtthatós polinomra, amely \mathbb{Q} fölött irreducibilis, de \mathbb{Z} fölött nem. $3(x^6 + 2)$ (Schönemann-Eisenstein $p = 2$ -re.)
20. Írjunk föl egy olyan negyedfokú polinomot \mathbb{Q} fölött, amelynek nincs racionális gyöke, és nem irreducibilis. $(x^2 + 1)^2$
21. Definiáljuk a triviális felbontás fogalmát szokásos gyűrűben. $b = cd$ a b -nek triviális felbontása, ha b és c valamelyike egység.

22. Mennyi az eredmény, ha \mathbb{Z}_5 -ben a 2-t elosztjuk 4-gyel? 3 (hiszen $3 *_{\mathbb{Z}_5} 4 = 2$)
23. Ha egy valós együtthatós homogén lineáris egyenletrendszerben hat ismeretlen van, és négy vezéregyes keletkezik, akkor hány megoldása van? végtelen sok
24. Hogyan olvasható le a rang a Gauss-elimináció végén? A vezéregyesek száma
25. Mi lesz az $y = x$ egyenesre tükrözés mátrixa? $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
26. Adjunk példát arra, hogy a mátrixok szorzása nem nullosztómentes. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2$
27. Hogyan változik a háromszor hármass determináns, ha minden elemét hárommal szorozzuk? 3^3 -szerese lesz
28. Számítsuk ki az $(1, 2)(3, 4)(4, 2)$ permutációt. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
29. Írjuk föl az $n \times n$ -es determinánst definiáló szummát. $\sum_{f \in S_n} \text{sg}(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$
30. A determináns oszlopaiban álló vektorok mely tulajdonsága az, amelyik szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a determináns nulla legyen? Lineárisan összefüggenek

Második rész

31. Igazoljuk, hogy minden test nullosztómentes. Ha $zw = 0$, de $z \neq 0$, akkor z inverzével szorozva, az asszociativitást és az inverz definícióját felhasználva $w = 0$.
32. Mondjuk ki a polinomok azonossági tételének bizonyításában felhasznált tételt, amely egy polinom gyökeinek maximális számáról szól, és adjunk példát arra, hogy ez a tétel nem igaz \mathbb{Z}_6 fölött. Szokásos (nullosztómentes!) gyűrű fölött egy polinomnak legfeljebb annyi gyöke lehet, mint a foka. Példa: \mathbb{Z}_6 -ban $x^3 - x$ -nek hat gyöke van.
33. Írjuk föl a Φ_{64} körosztási polinomot, és bontsuk \mathbb{Z}_2 fölött irreducibilisek szorzatára. $x^{32} + 1$, mert ..., ami \mathbb{Z}_2 fölött $(x + 1)^{32}$, mert tagonként lehet négyzetre emelni.
34. Az f szimmetrikus polinom főtagja $i x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$. Amikor elemi szimmetrikus polinomok segítségével állítjuk elő, akkor első lépésben mit kell kivonni, és az eljárás hány lépésben ér biztosan véget? $\sigma_1^{m_1 - m_2} \sigma_2^{m_2 - m_3} \cdots \sigma_{n-1}^{m_{n-1} - m_n} \sigma_n^{m_n}$ -t kell levonni, $(m_1 + 1)^n$ lépésben biztos véget ér.
35. Ha az $n \times n$ -es determináns első két sora egyenlő, akkor az f permutációhoz tartozó tagját melyik permutációhoz tartozó tag fogja biztosan kiejteni? $f \circ (1, 2)$