NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ______________

Mat. I. (BSc.) **Algebra: 6. vizsga (alap- és középszint)** *2007. január 26. (10.30)*

I. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt legalább* 15 *pontot elér, annak a vizsgája már sikeres; a többieké viszont elégtelen. (Ez utóbbi esetben a második részt ki sem javítjuk.)*

1. Mennyi $z = (-1-i)^{10}$ képzetes része?

   $\operatorname{Im} z =$ 32

2. Ha z szöge $3°$, akkor mi lesz $3/(\bar{z}^3)$ szöge fokokban kifejezve?

   $\arg(3/(\bar{z}^3) =$ $9°$

3. Ha egy z komplex szám egyenlő az abszolút értékének $2i$-szeresével, mekkora az abszolút értéke?

   $|z| =$ 0

4. Adjuk meg $-3i$ összes negyedik gyökének a szorzatát algebrai alakban.

   A szorzat $=$ $3i$

5. Mennyi lehet maximálisan egy egységgyök valós része?

   Maximális valós rész: 1 (Ez 1-nek a valós része.)

6. Ha ε rendje 75, akkor mennyi $o(\varepsilon^{40})$?

   $o(\varepsilon^{40}) =$ 15

7. Írjuk föl az $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ és $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ polinomok szorzatában x^2 együtthatóját.

   A keresett együttható: $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$.

8. Adjunk példát olyan harmadfokú polinomra, amelynek egyetlen gyöke $\mathbb{C}$-ben az i.

   $p(x) =$ $(x-i)^3$

9. Mondjuk ki az algebra alaptételét.

   Minden komplex együtthatós nem konstans polinomnak van komplex gyöke.

10. Adjunk példát egy olyan egész együtthatós polinomra, amelynek $\mathbb{Q}$-ban van gyöke, de $\mathbb{Z}_2$ fölött nézve nincs gyöke ($\mathbb{Z}_2$-ben).

    $p(x) =$ $2x+3$

11. Írjuk föl a négyváltozós σ_2 elemi szimmetrikus polinomot.

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

12. Adjuk meg $-4x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ gyökeinek négyzetösszegét.

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \dfrac{7}{4}$

13. Mondjuk ki a háromváltozós Newton–Girard-formulának azt az esetét, amelyben a négyzetösszeg a legnagyobb hatványösszeg.

$s_2 - \sigma_1 s_1 + 2\sigma_2 = 0$

14. Határozzuk meg a $-ix_1^7x_2x_3^9 + 3x_1^7x_2^5x_3^9 + 2x_1^7x_2^4x_3$ polinomban a lexikografikusan középső tagot.

$2x_1^7x_2^4x_3$

15. Határozzuk meg az előző kérdésben szereplő polinom fokát.

Fok: 21

16. Írjunk föl egy olyan $\mathbb{Z}$ fölött irreducibilis, egész együtthatós polinomot, melyben az együtthatók összege -2.

$f(x) = 3x - 5$

17. Egy negyedfokú, normált, valós együtthatós $p(x)$ polinomnak az i kétszeres gyöke. Bontsuk $\mathbb{R}$ fölött irreducibilisek szorzatára.

$p(x) = (x^2 + 1)^2$

18. Bontsuk föl $45x^3 - 45$-öt $\mathbb{Q}[x]$-ben irreducibilisek szorzatára, és jelezzük egyértelműen a tényezők számát.

$45x^3 - 45 = (45x - 45)(x^2 + x + 1)$, Tényezők száma: 2

19. Az $5x^3 + cx^2 + 120x + 60$ polinomban adjuk meg c egész értékét úgy, hogy a polinom irreducibilis legyen $\mathbb{Q}$ fölött.

Pl. $c = 3$

20. Adjunk meg $\mathbb{Z}_3$ fölött egy olyan negyedfokú polinomot, amely nem irreducibilis, és nincs gyöke $\mathbb{Z}_3$-ban.

$p(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

21. Egy háromismeretlenes lineáris egyenletrendszerben három vezéregyes keletkezik az elimináció végére. Hány megoldása lehet?

Megoldások lehetséges száma: 0 vagy 1

22. Írjuk föl az $x + y = 3$ és $x - y = -1$ egyenletrendszerben az y ismeretlen értékét a Cramer-szabály segítségével. A két determináns értékét ne számítsuk ki.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

23. Egy háromszor hármas M mátrix minden eleme 2. Mennyi a rangja?

$\rho(M) = 1$

24. Írjuk föl az origó körüli 90°-os szöggel való forgatás mátrixát.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

25. Keressünk olyan valós mátrixot, melynek a négyzete az egységmátrix -1-szerese.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

26. Számítsuk ki az $(1,3)(3,4)(3,2)(4,2)$ permutációt.

$$(1,3)(3,4)(3,2)(4,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

27. Egy kétszer kettes determinánst tükröztünk a főátlójára, majd megcseréltük a két sorát. Hogyan változott az értéke?

-1-szerese lett az eredetinek.

28. Az alábbi képletbe írjuk be a hiányzó betűket úgy, hogy egy $n \times n$-es determináns k-adik oszlop szerinti kifejtési tételét kapjuk. Jelölések: $M = ((a_{i,j}))$, a megfelelő előjeles aldeterminánsok $A_{i,j}$. (A képletben üresen hagyott kis kereteket kell kitölteni.)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\boxed{i},\boxed{k}} A_{\boxed{i},\boxed{k}} = \boxed{\det M}$$

29. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix}$ inverzét. Feltesszük, hogy a mátrix determinánsa nem nulla.

$$A^{-1} = \frac{1}{uy - vx} \begin{bmatrix} y & -v \\ -x & u \end{bmatrix}$$

30. Az $M \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ mátrix determinánsa nem nulla. Mennyi lesz M^7 rangja?

$\rho(M^7) = 6$

II. rész (30 perc). *Minden feladat maximálisan* 2 *pontot ér, a megoldásra* 0, 1 *vagy* 2 *pontot lehet kapni. A válaszokat röviden indokolni kell.*

31. Vezessük le az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ szám köbgyökeit megadó képletet.
32. Mondjuk ki a binomiális tételt, és igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}_{101}$ fölött tagonként lehet 101-edik hatványra emelni.
33. Számítsuk ki a Φ_{12} körosztási polinomot.
34. Tekintsük a négyszer négyes $((b_{i,j}))$ determinánst. A $b_{1,4}b_{2,2}b_{3,1}b_{4,3}$ tagnak mi az előjele, és melyik az a permutáció, amely a transzponált determinánsban az ezzel megegyező taghoz tartozik?
35. Igazoljuk, hogy ha f nem konstans, egész együtthatós polinom, amely irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött is. A felhasznált lemmát nem kell bizonyítani, de ki kell mondani.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első részre kapott összpontszám x, a második részre pedig y, akkor a súlyozott összeg $S = 2x + 3y$. Ekkor:*

	Osztályzat
$S \leq 41$	2
$42 \leq S \leq 53$	3
$54 \leq S \leq 65$	4
$66 \leq S \leq 90$	5