NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. I. (BSc.) **Algebra: 5. vizsga (alap- és középszint)** *2007. január 26. (8.00)*

I. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt legalább* 15 *pontot elér, annak a vizsgája már sikeres; a többieké viszont elégtelen. (Ez utóbbi esetben a második részt ki sem javítjuk.)*

1. Mennyi $z = (1 - i)^{10}$ képzetes része?

   $\mathrm{Im}\, z = \ -32$

2. Ha z szöge $13°$, akkor mi lesz $2/(\bar{z}^2)$ szöge fokokban kifejezve?

   $\arg(2/(\bar{z}^2) = \ 26°$

3. Ha egy z komplex szám egyenlő az abszolút értékének $-i$-szeresével, mekkora a szöge?

   $\arg z = \ 270°$

4. Adjuk meg $2i$ összes negyedik gyökének a szorzatát algebrai alakban.

   A szorzat $= \ -2i$

5. Mennyi lehet maximálisan egy egységgyök képzetes része?

   Maximális képzetes rész: 1 (Ez i-nek a képzetes része.)

6. Ha ε rendje 90, akkor mennyi $o(\varepsilon^{40})$?

   $o(\varepsilon^{40}) = \ 9$

7. Írjuk föl az $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ és $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ polinomok szorzatában x^2 együtthatóját.

   A keresett együttható: $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$.

8. Adjunk példát olyan harmadfokú polinomra, amelynek egyetlen komplex gyöke a 2.

   $p(x) = \ (x - 2)^3$

9. Mondjuk ki a polinomok azonossági tételét.

   Ha két legföljebb n-edfokú polinom több, mint n helyen megegyezik, akkor a polinomok egyenlők.

10. Adjunk példát egy olyan egész együtthatós, normált polinomra, amelynek $\mathbb{Q}$-ban nincs gyöke, de $\mathbb{Z}_2$ fölött nézve van.

    $p(x) = \ x^2 + 1$

11. Írjuk föl a négyváltozós σ_3 elemi szimmetrikus polinomot.

$\sigma_3 = \; = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$

12. Adjuk meg $-3x^3+2x^2+2x-1$ gyökeinek négyzetösszegét.

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \dfrac{16}{9}$

13. Mondjuk ki a kétváltozós Newton–Girard-formulának azt az esetét, amelyben a köbösszeg a legnagyobb hatványösszeg.

$s_3 - \sigma_1 s_2 + \sigma_2 s_1 - 3\sigma_3 = 0$

14. Határozzuk meg a $-3x_1^7x_2x_3^9 + 2x_1^6x_2^5x_3^9 + ix_1^7x_2^4x_3$ polinomban a lexikografikusan középső tagot.

$-3x_1^7x_2x_3^9$

15. Határozzuk meg az előző kérdésben szereplő polinom fokát.

Fok: 20

16. Írjunk föl egy olyan $\mathbb{Z}$ fölött irreducibilis, egész együtthatós polinomot, melyben az együtthatók összege 1.

$f(x) = \; 3x - 2$

17. Ha f és g valós együtthatós, $\mathbb{R}$ fölött irreducibilis polinomok, akkor mik az fg fokának lehetséges értékei?

Lehetséges fokok: $\{2, 3, 4\}$

18. Bontsuk föl $50x^3 - 50$-et $\mathbb{Q}[x]$-ben irreducibilisek szorzatára, és jelezzük egyértelműen a tényezők számát.

$50x^3 - 50 = \quad (50x - 50)(x^2 + x + 1),$ Tényezők száma: 2

19. Az $5x^3 + cx^2 + 120x + 90$ polinomban adjuk meg c egész értékét úgy, hogy a polinom irreducibilis legyen $\mathbb{Q}$ fölött.

Pl. $c = \; 2$

20. Adjunk meg $\mathbb{Z}_2$ fölött egy olyan negyedfokú polinomot, amely nem irreducibilis, és nincs gyöke $\mathbb{Z}_2$-ben.

$p(x) = \; (x^2 + x + 1)^2 = x^4 + x^2 + 1$

21. Egy háromismeretlenes lineáris egyenletrendszerben két vezéregyes keletkezik az elimináció végére. Hány megoldása lehet?

Megoldások lehetséges száma: 0 vagy végtelen

22. Írjuk föl az $x+y=4$ és $x-y=0$ egyenletrendszerben az x ismeretlen értékét a Cramer-szabály segítségével. A két determináns értékét ne számítsuk ki.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

23. Egy háromszor hármas M mátrix minden eleme 3. Mennyi a rangja?

$\rho(M) = 1$

24. Írjuk föl az $y=-x$ egyenesre való tükrözés mátrixát.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

25. Adjunk meg egy olyan mátrixot, amelynek a köbe nulla, de a négyzete nem.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

26. Számítsuk ki az $(1,2)(2,4)(3,1)(4,2)$ permutációt.

$$(1,2)(2,4)(3,1)(4,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

27. Egy kétszer kettes determinánst tükröztünk a mellékátlójára. Hogyan változott az értéke?

Nem változott.

28. Az alábbi képletbe írjuk be a hiányzó betűket úgy, hogy egy $n\times n$-es determináns k-adik sor szerinti kifejtési tételét kapjuk. Jelölések: $M=((a_{i,j}))$, a megfelelő előjeles aldeterminánsok $A_{i,j}$. (A képletben üresen hagyott kis kereteket kell kitölteni.)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\boxed{k},\boxed{j}} A_{\boxed{k},\boxed{j}} = \boxed{\det M}$$

29. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ inverzét. Feltesszük, hogy a mátrix determinánsa nem nulla.

$$A^{-1} = \frac{1}{xv-yu}\begin{bmatrix} v & -y \\ -u & x \end{bmatrix}$$

30. Egészítsük ki az alábbi, az $n\times n$-es determinánst definiáló képletet. (A képletben üresen hagyott kis kereteket kell kitölteni.)

$$\sum_{f\in S_n} \boxed{\operatorname{sg}(f)}\, a_{1,\boxed{f(1)}}\, a_{\boxed{2},\boxed{f(2)}} \cdots a_{\boxed{n},\boxed{f(n)}} = \det((a_{i,j}))\,.$$

II. rész (30 perc). *Minden feladat maximálisan* 2 *pontot ér, a megoldásra* 0, 1 *vagy* 2 *pontot lehet kapni. A válaszokat röviden indokolni kell.*

31. Vezessük le az $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ szám köbgyökeit megadó képletet.
32. Mondjuk ki a gyöktényező kiemeléséről szóló tételt, és lássuk be, hogy ha egy harmadfokú, racionális együtthatós polinomnak van racionális gyöke, akkor nem irreducibilis.
33. Tekintsük a négyszer négyes $((b_{i,j}))$ determinánst. A $b_{1,2}b_{2,3}b_{3,4}b_{4,1}$ tagnak mi az előjele, és melyik az a permutáció, amely a transzponált determinánsban az ezzel megegyező taghoz tartozik?
34. Igazoljuk, hogy ha egy lineáris egyenletrendszerben több az ismeretlen, mint az egyenlet, akkor az egyenletrendszernek nem lehet egyértelmű a megoldása.
35. Mondjuk ki azt az állítást, amely a $\mathbb{Z}$ fölötti irreducibilitást jellemzi a $\mathbb{Q}$ fölötti irreducibilitás segítségével, továbbá azt a Gauss-lemmát, amit a bizonyításban felhasználtunk.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első részre kapott összpontszám x, a második részre pedig y, akkor a súlyozott összeg $S = 2x + 3y$. Ekkor:*

	Osztályzat
$S \le 41$	2
$42 \le S \le 53$	3
$54 \le S \le 65$	4
$66 \le S \le 90$	5