NÉV: __________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. I. (BSc.) **Algebra: 3. vizsga (alap- és középszint)** *2007. január 12. (8.00)*

I. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt legalább* 15 *pontot elér, annak a vizsgája már sikeres; a többieké viszont elégtelen. (Ez utóbbi esetben a második részt ki sem javítjuk.)*

1. Mi $z = (2-3i)^2$ képzetes része?

   $\operatorname{Im} z = -12$

2. Ha z és $\bar{z}$ szögeinek különbsége $180°$, akkor mennyi z valós része?

   $\operatorname{Re} z = 0$

3. Ha egy nem nulla z komplex szám egyenlő az abszolút értékének i-szeresével, mekkora a szöge (fokokban kifejezve)?

   $\arg z = 90°$

4. Hány olyan z komplex szám van, melynek háromnál kevesebb (különböző) komplex negyedik gyöke van?

   Az ilyen z-k száma: 1

5. Hány primitív tizedik egységgyök van?

   A prim. tizedik egységgyökök száma: 4

6. Ha ε rendje 80, akkor mennyi $o(\varepsilon^{30})$?

   $o(\varepsilon^{30}) = 8$

7. Mit jelent az, hogy egy polinom normált?

   A főegyütthatója 1.

8. Adjunk példát két olyan harmadfokú polinomra, melyek különbségének az egyetlen gyöke a 2.

   $f = x^3 + x - 2$ $g = x^3$

9. Adjunk meg olyan negyedfokú, **valós** együtthatós polinomot, amelynek a $2+i$ legalább 2-szeres gyöke.

   $p = (x-2-i)^2(x-2+i)^2 = (x^2-4x+5)^2 = x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25$

10. Adjunk meg $\mathbb{Z}_6$ fölött olyan elsőfokú polinomot, amelynek egynél több gyöke van.

    $p =$ 2x

11. Adjuk meg x^2+1 gyöktényezős alakját $\mathbb{Z}_2$ fölött.

    $x^2 + 1 = (x-1)^2$

12. Adjuk meg $-3x^3 + 2x - 1$ gyökeinek reciprokösszegét.

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{-2/3}{-1/3} = 2$$

13. Határozzuk meg az összes ötvenedik egységgyök szorzatát.

$$\prod_{i=0}^{49} \varepsilon_i = -1$$

14. Ha egy $p(x_1, x_2, x_3)$ **szimmetrikus** polinom egyik tagja $8x_1^2x_2^3x_3^4$, akkor az alábbiak közül melyek **nem** lehetnek főtagjai p-nek:
(A) $8x_1^4x_2^2x_3^3$; (B) $8x_1^4x_2^3x_3^2$; (C) x_2^{100}; (D) x_1^{100}.
(Csak a válasz(ok) betűjelét írjuk a keretbe.)

(A), (C)

15. Mik az $x^{13} + 3x^{10} + x$ polinom racionális gyökei?

Rac. gyökök: 0

16. Ha f és g valós együtthatós, $\mathbb{R}$ fölött irreducibilis polinomok, akkor mik az fg fokának lehetséges értékei?

$\mathrm{gr}(fg) \in \{ 2, 3, 4 \}$

17. Hány irreducibilis osztója van $12x^3+12$-nek $\mathbb{Q}$ fölött asszociáltság erejéig?

Irr. osztók száma: 2

18. Bontsuk föl $12x^3+12$-t $\mathbb{Z}[x]$-ben irreducibilisek szorzatára.

$12x^3 + 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (x + 1)(x^2 - x + 1)$

19. Írjunk föl egy harmadfokú polinomot, melyre alkalmazható a Schönemann–Eisenstein-kritérium, és nem irreducibilis $\mathbb{Z}_3$ fölött.

$p = x^3 + 3$

20. Milyen q értékekre lesz az $x^3 - 3x + q$ polinomnak többszörös gyöke?

$q = \pm 2$

21. Írjunk föl egy két ismeretlenes, három egyenletből álló ellentmondásos lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

22. Írjuk föl az $x + y = 3$ és $x - y = 1$ egyenletrendszerben az x ismeretlen értékét a Cramer-szabály segítségével. (Az x konkrét értékét nem kell kiszámolni.)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

23. Egy két sorból és három oszlopból álló mátrix két sora egyenlő. Mik az oszlopaiból álló vektorrendszer rangjának lehetséges értékei?

Lehetséges rangok: 0, 1

24. Írjuk föl az y-tengelyre való tükrözés mátrixát.

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

25. Adjunk meg egy olyan mátrixot, amelynek a köbe nulla, de a négyzete nem.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

26. Bontsuk föl a $\sigma : 1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ permutációt cserék szorzatára. (Ne feledjük: megállapodás, hogy a permutációk szorzásánál jobbról haladunk balra.)

$\sigma = (1,3)(1,2)(1,4)$

27. Egy négyszer négyes determinánst tükröztünk a függőleges középvonalára. Hogyan változott az értéke?

Nem változott.

28. Egészítsük ki a keretben levő képletet, hogy a determinánsokról szóló ferde kifejtési tételt kapjuk. Jelölések: $M = ((a_{i,j})) \in T^{n\times n}$ a mátrix, a megfelelő előjeles aldeterminánsok $A_{i,j}$, a kifejtésben szerepet játszó két sorindex $k \neq \ell$. (A képletben üresen hagyott kis kereteket kell kitölteni.)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,\boxed{j}} A_{\boxed{\ell},\boxed{j}} = \boxed{0}$$

29. Egy háromszor hármas A mátrix oszlopvektorai $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ és $2\mathbf{v} - \mathbf{w}$, ahol $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges adott vektorok. Mennyi A determinánsának az értéke?

$\det A = 0$

30. Mondjuk ki a determinánsok szorzástételét.

Tetszőleges $A, B \in T^{n\times n}$ mátrixokra $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

II. rész (30 perc). *Minden feladat maximálisan* 2 *pontot ér, a megoldásra* 0, 1 *vagy* 2 *pontot lehet kapni. A válaszokat röviden indokolni kell.*

31. Összeszoroztuk az összes olyan komplex számot, amelynek az abszolút értéke 8, a valós része pedig 7. Mit kaptunk eredményül?
32. Bizonyítsuk be, hogy minden test nullosztómentes.
33. Mi a $\Phi_2\Phi_3\Phi_6$ polinomban az x együtthatója?
34. Tegyük föl, hogy a négyszer négyes $((b_{i,j}))$ determináns első és harmadik oszlopa egyenlő. A $b_{1,2}b_{2,4}b_{3,3}b_{4,1}$ tagnak mi az előjele, és melyik tag „ejti ezt ki”?
35. Adjunk példát olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinomra, amely nem irreducibilis, de $\bar{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ irreducibilis valamilyen p prímszámra. Igazoljuk az f mindkét tulajdonságát.

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első részre kapott összpontszám x, a második részre pedig y, akkor a súlyozott összeg $S = 2x + 3y$. Ekkor:*

	Osztályzat
$S \leq 41$	2
$42 \leq S \leq 53$	3
$54 \leq S \leq 65$	4
$66 \leq S \leq 90$	5