NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

Mat. I. (BSc.) **Algebra: 2. vizsga (alap- és középszint)** *2007. január 5. (10.30)*

I. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt legalább* 15 *pontot elér, annak a vizsgája már sikeres; a többieké viszont elégtelen. (Ez utóbbi esetben a második részt ki sem javítjuk.)*

1. Mennyi $1 - i$ szögének és $-1 - i$ szögének a különbsége fokokban megadva?

   $90°$

2. Ha $|z| = 3$ és z valós része 3, akkor mennyi z képzetes része?

   $\mathrm{Im}(z) = 0$

3. Ha z szöge $-16°$, mennyi $w = i \cdot z^{-3}$ ($0°$ és $360°$ közötti) szöge?

   $\arg(w) = 138°$

4. Összeszoroztuk $3+i$ negyedik gyökei közül valamelyik kettőnek a hosszát. Mennyi az eredmény?

   Hosszak szorzata $= \sqrt[4]{10}$

5. Hányadik primitív egységgyök a $\cos 350° + i \sin 350°$?

   $n = 36$

6. Ha ε rendje 60, akkor mennyi $o(\varepsilon^{44})$?

   $o(\varepsilon^{44}) = 15$

7. Legfeljebb hány komplex gyöke lehet egy másodfokú és egy harmadfokú polinom különbségének?

   Gyökök max. száma: 3

8. Adjunk meg egy olyan valós együtthatós polinomot, amelynek a $2 + i$ legalább kétszeres, a $2 - i$ pedig pontosan háromszoros gyöke.

   $p(x) = (x - 2 - i)^3(x - 2 + i)^3 = x^6 - 12x^5 + 63x^4 - 184x^3 + 315x^2 - 300x + 125$

9. Mennyi a $-2x^5 + 3x^4 + 1$ polinom komplex gyökeinek a szorzata?

   Szorzat $= 1/2$

10. Mi $x^4 + 4$ gyöktényezős alakja?

    $x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)(x - 1 + i)$

11. Írjuk föl a négyváltozós σ_2 elemi szimmetrikus polinomot.

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

12. Mi $x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^{18} + x_1^4x_2$ főtagja?

Főtag = $x_1^4x_2$

13. Mennyi az előző kérdésben szereplő polinom foka?

Fok = 20

14. Mik az egységek $\mathbb{R}[x]$-ben?

Egységek: a nem nulla konstansok

15. Ha $\mathbb{R}[x]$-ben $x^{777} + 3$-at osztjuk x^{99}-nel, mi a maradék?

Maradék = 3

16. Emeljük ki az $x - 2$ gyöktényezőt $x^5 + 3$-ból $\mathbb{Z}_5$ fölött.

$x^5 + 3 = (x-2)(x-2)^4 = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 1)$

17. Az $x^3 - 60x + 1$ polinomnak hány valós gyöke van?

A valós gyökök száma: 3

18. Adjuk meg $33x^7 + 15x^4 + 18$ egy irreducibilis tényezőjét $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Irr. tényező: 3

19. Adjunk meg egy negyedfokú polinomot $\mathbb{Z}_3$ fölött, amelynek nincs gyöke $\mathbb{Z}_3$-ban, de mégsem irreducibilis.

$p(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 1)$

20. Definiáljuk a felbonthatatlan (irreducibilis) fogalmát szokásos gyűrűben.

$r \in R$ felbonthatatlan, ha: r nem nulla, nem egység, és bármely $r = ab$ fölbontásnál, ahol $a, b \in R$, az a és b valamelyike egység.

21. Adjunk $\mathbb{Z}_{15}$-ben példát 10-nél nagyobb nullosztóra.

Nullosztó: 12

22. Ha egy valós együtthatós homogén lineáris egyenletrendszerben hat ismeretlen és négy egyenlet van, akkor mik a megoldások számának lehetséges értékei?

Megoldásszám: ∞.

23. Mi lesz a (-1) fokos forgatás mátrixa? (Az eredményben szerepelhet szögfüggvény.)

$$\begin{bmatrix} \cos(-1^\circ) & -\sin(-1^\circ) \\ \sin(-1^\circ) & \cos(-1^\circ) \end{bmatrix}$$

24. Hogyan változik a háromszor hármas determináns, ha az első és a harmadik oszlopát megcseréljük, majd a mátrix összes elemét 3-mal megszorozzuk?

(-27)-szerese lesz az eredetinek.

25. Írjuk föl az $A = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ általános kétszer kettes mátrix inverzét (föltesszük, hogy ez létezik).

$$A^{-1} = \frac{1}{xv - uy} \begin{bmatrix} v & -y \\ -u & x \end{bmatrix}$$

26. Legföljebb hány 1-es lehet egy olyan kétszer kettes M mátrixban, melynek minden eleme 0 vagy 1, és $M^2 = 0$?

Az 1-esek max. száma: 1

27. Számítsuk ki az $(1,6)(4,6)(6,1)$ permutációt.

$(1,6)(4,6)(6,1) = (1,4)$

28. Írjuk föl a háromszor hármas $A = (a_{ij})$ mátrix determináns definíciójában a + előjellel szorzott tagokat.

$a_{11}a_{22}a_{33}, \quad a_{12}a_{23}a_{31}, \quad a_{13}a_{21}a_{32}$

29. Írjuk föl a Vandermonde-determinánst és az értékét megadó képletet.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (a_j - a_i)$$

30. Az $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mátrix 19-edik hatványa az egységmátrix. Mennyi az M^8 rangja?

M^8 rangja $= 5$

II. rész (30 perc). *Minden feladat maximálisan* 2 *pontot ér, a megoldásra* 0, 1 *vagy* 2 *pontot lehet kapni. A válaszokat röviden indokolni kell.*

31. Bizonyítsuk be komplex számokra, hogy szorzásnál a szögek összeadódnak.
32. Adjunk egy példát arra, hogy a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételeinek teljesülése nem biztosítja a polinom $\mathbb{Z}$ fölötti irreducibilitását.
33. Bizonyítsuk be a polinomok maradékos osztásáról szóló tételnek az egyértelműségi állítását.
34. Számítsuk ki a 2008×2008-as determinánsban a mellékátlóhoz tartozó tag előjelét.
35. Irreducibilis-e $\Phi_9(x^7)$ a $\mathbb{Q}$ fölött?

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első részre kapott összpontszám x, a második részre pedig y, akkor a súlyozott összeg $S = 2x + 3y$. Ekkor:*

	Osztályzat
$S \leq 41$	2
$42 \leq S \leq 53$	3
$54 \leq S \leq 65$	4
$66 \leq S \leq 90$	5