NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

Mat. I. (BSc.) **Algebra: 1. vizsga (alap- és középszint)** *2007. január 5. (8.00)*

I. rész (60 perc). *Minden válaszért* 0 *vagy* 1 *pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki itt legalább* 15 *pontot elér, annak a vizsgája már sikeres; a többieké viszont elégtelen. (Ez utóbbi esetben a második részt ki sem javítjuk.)*

1. Mennyi $-1+i$ szöge fokokban megadva?

   $\arg(-1+i) = 135°$

2. Ha $|z| = 2$ és z képzetes része 2, akkor mennyi z valós része?

   $\mathrm{Re}(z) = 0$

3. Ha z szöge 150°, mennyi z^{-3} konjugáltjának (0° és 360° közötti) szöge?

   $\arg(\overline{z^{-3}}) = 90°$

4. Összeadtuk $1+2i$ összes harmadik gyökeinek a hosszát. Mennyi az eredmény?

   Hosszak összege $= 3\sqrt[6]{5}$

5. Hányadik primitív egységgyök a $\cos 150° + i \sin 150°$?

   $n = 12$

6. Ha ε rendje 40, akkor mennyi $o(\varepsilon^{12})$?

   $o(\varepsilon^{12}) = 10$

7. Maximum hány gyöke lehet két másodfokú polinom összegének?

   Gyökök max. száma: végtelen

8. Adjunk meg egy olyan valós együtthatós polinomot, amelynek az $1+i$ legalább kétszeres, az $1-i$ pedig pontosan háromszoros gyöke.

   $p(x) = (x-1-i)^3(x-1+i)^3 = x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 32x^3 + 36x^2 - 24x + 8$

9. Mennyi a $-3x^6 + 3x^5 + 14$ polinom komplex gyökeinek az összege?

   Összeg $= 1$

10. Mi x^4+1 gyöktényezős alakja?

$$x^4+1 = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

11. Írjuk föl a négyváltozós σ_3 elemi szimmetrikus polinomot.

$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$

12. Mi $x_1^3x_2^2 + x_1^3x_2^3 + x_1x_2^7$ főtagja?

Főtag = $x_1^3x_2^3$

13. Mennyi az előző kérdésben szereplő polinom foka?

Fok = 8

14. Mik az egységek $\mathbb{C}[x]$-ben?

Egységek: a nem nulla konstansok

15. Ha $\mathbb{R}[x]$-ben $x^3 + 1$-et osztjuk x^2-tel, mi a maradék?

Maradék = 1

16. Emeljük ki az $x - 2$ gyöktényezőt $x^3 + 1$-ből $\mathbb{Z}_3$ fölött.

$x^3 + 1 = (x - 2)(x^2 + 2x + 1)$

17. Az $x^3 - x + 100$ polinomnak hány valós gyöke van?

A valós gyökök száma: 1

18. Adjuk meg $10x^6 + 15x^4 + 35$ egy irreducibilis tényezőjét $\mathbb{Z}[x]$-ben.

Irr. tényező: 5

19. Adjunk meg egy negyedfokú polinomot $\mathbb{Z}_5$ fölött, amelynek nincs gyöke $\mathbb{Z}_5$-ben, de mégsem irreducibilis.

$p(x) = (x^2 + 3)(x^2 + 3)$

20. Definiáljuk a prím fogalmát szokásos gyűrűben.

$p \in R$ prím, ha $0 \neq p$ nem egység, és tetszőleges $a, b \in R$ elemekre: $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ vagy $p \mid b$.

21. Adjunk $\mathbb{Z}_{35}$-ben példát 11 és 19 közötti nullosztóra.

Nullosztó: 14 (vagy 15)

22. Ha egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszerben hat ismeretlen és négy egyenlet van, akkor mik a megoldások számának lehetséges értékei?

Megoldásszám: 0 vagy ∞.

23. Mi lesz a (-35) fokos forgatás mátrixa? (Az eredményben szerepelhet szögfüggvény.)

$$\begin{bmatrix} \cos(-35^\circ) & -\sin(-35^\circ) \\ \sin(-35^\circ) & \cos(-35^\circ) \end{bmatrix}$$

24. Hogyan változik a háromszor hármas determináns, ha az első és a harmadik sorát megcseréljük, majd mindkettőt 2-vel megszorozzuk?

(-4)-szerese lesz az eredetinek.

25. Írjuk föl az $A = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ általános kétszer kettes mátrix inverzét (feltesszük, hogy ez létezik).

$$A^{-1} = \frac{1}{xv - uy} \begin{bmatrix} v & -y \\ -u & x \end{bmatrix}$$

26. Maximum hány nulla lehet egy olyan kétszer kettes mátrixban, melynek a négyzete nem nulla?

Nullák max. száma: 3

27. Számítsuk ki az $(1,4)(4,3)(4,1)$ permutációt.

$(1,4)(4,3)(4,1) = (1,3)$

28. Írjuk föl a háromszor hármas $A = (a_{ij})$ mátrix determináns definíciójában a $-$ előjellel szorzott tagokat.

$a_{13}a_{22}a_{31}, \quad a_{11}a_{23}a_{32}, \quad a_{12}a_{21}a_{33}$

29. Írjuk föl a Vandermonde-determinánst és az értékét megadó képletet.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (a_j - a_i)$$

30. Az $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ determinánsa 3. Mennyi az inverzének a rangja?

M^{-1} rangja $= 4$

II. rész (30 perc). *Minden feladat maximálisan* 2 *pontot ér, a megoldásra* 0, 1 *vagy* 2 *pontot lehet kapni. A válaszokat röviden indokolni kell.*

31. Bizonyítsuk be komplex számokra, hogy a szorzat abszolút értéke az abszolút értékek szorzata.
32. Adjunk egy-egy példát arra, hogy a Schönemann–Eisenstein-kritériumban szükséges az is, hogy a prím ne ossza a főegyütthatót, és az is, hogy a négyzete ne ossza a konstans tagot.
33. Bizonyítsuk be a polinomok maradékos osztásáról szóló tételnek az egyértelműségi állítását.
34. Számítsuk ki a 2007×2007-es determinánsban a mellékátlóhoz tartozó tag előjelét.
35. Irreducibilis-e $\Phi_6(x^5)$ a $\mathbb{Q}$ fölött?

OSZTÁLYZATOK: Amennyiben az első részre megvan a legalább 15 *pont, akkor a végső osztályzatot az alábbiak alapján számolhatjuk ki. Ha az első részre kapott összpontszám x, a második részre pedig y, akkor a súlyozott összeg $S = 2x + 3y$. Ekkor:*

	Osztályzat
$S \leq 41$	2
$42 \leq S \leq 53$	3
$54 \leq S \leq 65$	4
$66 \leq S \leq 90$	5