Bsc algebra1 alapszintű gyakorlat

Nyolcadik alkalom (2006 nov. 7–10)

2.2.34. *Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e, mik az invertálható elemeik?*

a) $\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$, $\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ *a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*

b) $\mathbb{C}[x]$ *páros fokú elemei és a 0 a polinomok szokásos összeadására és szorzására nézve.*

c) $\mathbb{R}[x]$ *legalább huszadfokú elemei és a 0 a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*

d) $\mathbb{C}[x]$ *elemei a szokásos összeadásra, és a kompozícióra, mint szorzásra.*

e) *Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés.*

2.2.8, 2.2.10, 2.2.20. *Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.*

a) *Ha $\circ$ kétváltozós művelet egy A halmazon, akkor csak egy neutrális eleme lehet.*

b) *Ha e neutrális elem a $\circ$ kétváltozós asszociatív műveletre nézve, akkor minden elemnek legfeljebb egy (kétoldali) inverze lehet (e-re nézve).*

c) *Ha S gyűrű, és 0 az összeadás neutrális eleme (azaz S nulleleme), akkor tetszőleges $s,t\in S$ esetén $s*0=0*s=0$ és $(-s)*t=s*(-t)=-(s*t)$.*

2.4.18. *Mely m-ekre van $\mathbb{Z}_m[x]$-ben olyan polinom, melynek több gyöke van, mint a foka?*

3.5.10. *Legyen $f\in\mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol $n\geq 1$, p egy prímszám, és $0<k<n$. Legyen $\overline{f}\in\mathbb{Z}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?*

a) *Ha f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, akkor $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett.*

b) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ illetve $\mathbb{Q}$ felett.*

c) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

d) *Ha f-nek van $\mathbb{Z}$ felett k-adfokú tényezője, akkor $\overline{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.*

e) *Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy $\overline{f}$ foka n.*

3.4.18. *Mutassuk meg, hogy az $f,g\in\mathbb{Z}[x]$ polinomok $\mathbb{Z}[x]$-beli legnagyobb közös osztója a következő módon határozható meg. Alkalmazzuk az euklideszi algoritmust $\mathbb{Q}$ felett, a kapott racionális együtthatós polinomot írjuk fel rh alakban, ahol $r\in\mathbb{Q}$ és $h\in\mathbb{Z}[x]$ primitív polinom. Határozzuk meg f és g együtthatóinak legnagyobb közös osztóját, az eredmény ennek a számnak a h-szorosa. Hogyan módosítható ez az eljárás, ha két $\mathbb{C}[x,y]$-beli polinom legnagyobb közös osztóját keressük?*

3.5.14, 3.5.15, 3.5.16, 3.3.21*. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok?*

a) $\mathbb{C}$ *illetve* $\mathbb{R}$ *felett* x^7+x+1, x^2-2, x^2+x+1.

b) $\mathbb{Q}$ *felett* $3x^7-6x^6+6x^2+3x-2$, $3x^7+x^6+6x^2+2x-2$, $3x^7-6x^6+6x^2+2x-2$, $x^{16}+1$, $x^{16}+2$, x^4-14x^2+9, x^4-x^2+1, $3x^7+6x-18$, x^5+4.

c) $\mathbb{Z}_2$ *felett* x^8+x^2+1, x^5+x+1, $x^5+x^4+x^3+1$, x^5+x^3+1.

d) $\mathbb{Z}_{17}$ *felett* x^2+1, x^4+1, x^8+1, $x^{17}+1$, $x^{17}+2$.

e) $\mathbb{Z}$ *felett* $x^4+2x+27$, $3x^7+6x-18$, x^6+1, x^3+7x-3, $x^4+3x^3+x^2+1$.

2.2.37*. *Jelölje $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ az $a+b\sqrt{2}$ alakú számok gyűrűjét a $\mathbb{C}$-beli összeadásra és szorzásra, ahol $a,b\in\mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy ebben végtelen sok invertálható elem van.*

IHF. *Soroljuk föl a hatodfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ fölött.*