Bsc algebra1 alapszintű gyakorlat
Hetedik alkalom (2006 okt. 24–27)

3.1.28. *Igaz-e a* $2x \mid 3x^2$ *oszthatóság rendre a* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ *feletti polinomok körében?*

3.1.6. *Mutassuk meg, hogy* $\mathbb{Z}[x]$*-ben egy polinom akkor és csak akkor osztható egy egész számmal, ha minden együtthatója osztható vele.*

3.3.13. *Bontsuk fel a* $6(x^2-2)(x^2+1)$ *polinomot* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ *felett felbonthatatlanok szorzatára.*

3.5.4. *A Schönemann-Eisenstein kritérium az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül:* $x^{11}+2x+18$, $x^{11}+2x+12$, $x^{11}+12x+5$, $x^{11}+n$ *(mely* n*-ekre?).*

3.3.18. *Irreducibilis-e* x^4+4 *illetve* x^4+9 *a* $\mathbb{Q}$ *felett? Általánosítsunk!*

3.5.9. *Felbonthatatlan-e* $\mathbb{Z}[x]$*-ben az* x^4+x+1 *polinom? És* $\mathbb{R}[x]$*-ben?*

3.3.22. *Bontsuk fel az* x^4-10x^2+1 *polinomot* $\mathbb{R}$ *felett felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$*). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a* $\mathbb{Q}$ *feletti felbontást is.*

3.3.20. *Bizonyítsuk be, hogy ha* p *prímszám, akkor az* $(x+y)^p-x^p-y^p$ *polinom osztható* p*-vel* $\mathbb{Z}[x,y]$*-ban. Vezessük le ebből a kis Fermat-tételt.*

3.5.13. *Alkalmazható-e a Schönemann-Eisenstein a* $\Phi_p(x+1)$ *polinomra, ahol* p *prímszám?*

3.3.19. *Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat* $\mathbb{Z}_2$ *felett.*

3.9.22. *Bontsuk az* $x^{12}-1$ *polinomot irreducibilisek szorzatára* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ *és* $\mathbb{Z}_5$ *felett.*

3.5.8. *Az* $x^4+x^3+x^2+1$ *polinomot* $\mathbb{Z}_2$ *felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis* $\mathbb{Q}$ *felett.*

3.5.6. *A* $6x^4+3x+1$ *polinomot a 3 prímszám segítségével vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis* $\mathbb{Q}$ *felett. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.*

2.4.20*. *Tegyük fel, hogy az* $f \in \mathbb{C}[x]$ *polinom minden racionális helyen racionális értéket vesz fel. Következik-e ebből, hogy* f *racionális együtthatós? Igaz-e az állítás, ha „racionális” helyett mindenütt „egész” szerepel?*

2.4.23*. *Van-e olyan* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *polinom, melyre* $f(10)=400$, $f(14)=440$ *és* $f(18)=520$*?*

Fagyejev-Szominszkij, 679*. *Igazoljuk, hogy az* $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1$ *polinom irreducibilis* $\mathbb{Z}$ *felett, ha* $a_1,\dots,a_n$ *páronként különböző egész számok.*

3.5.18*. *Van-e olyan* $f(x)$ *egész együtthatós polinom, hogy minden* $g(x)$ *egész együtthatós polinomra az* $f\big(g(x)\big)$ *polinom irreducibilis legyen* $\mathbb{Q}$ *fölött?*

IHF. *Az első 20 darab* $n \geq 1$ *egészre döntsük el, hogy irreducibilis-e* x^n+1 *a* $\mathbb{Q}$ *fölött.*