Bsc algebra1 alapszintű gyakorlat

Tizenegyedik alkalom (2006 nov. 28 – dec. 1)

1. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat az első sor szerinti kifejtéssel, az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel, a felső háromszög alakra hozás módszerével, végül a* 3×3*-asokat a Sarrus-szabállyal is.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \textbf{IHF:} \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

3. *Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Írjuk fel a harmadik és a negyedik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. *Egy* 2006×2006*-es determináns minden sora számtani sorozat. Mennyi az értéke?*

5. *Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.*

6. *Van-e olyan* $123456789\times 123456789$*-es mátrix, melyben csak a 0 és 1 számok szerepelnek, és determinánsa 2?*

7*. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy* n*-edrendű, komplex elemű determinánsban* a_{ij} *az* a_{ji} *konjugáltja minden* i, j*-re, akkor a determináns értéke valós.*

8. *Jelölje* F_α *a síkon az origó körüli, pozitív irányú,* α *szögű forgatást, és* T *az* $y = 2x$ *egyenesre való tükrözést. Írjuk fel ezek mátrixát, és számítsuk ki az* (x, y) *pont képét. Tükrözés, illetve forgatás lesz-e* $F_\alpha \circ F_\beta$, $F_\alpha \circ T$, $T \circ F_\alpha$*?*

9. *Legyen* A *a térben a* z*-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az* x*-tengelyt az* y*-tengelybe viszi,* B *pedig az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a* $(0, 0, 0)$ *és* $(1, 1, 1)$ *pontokat összekötő egyenesre. Mi lesz ezeknél az* $(1, 2, 3)$ *pont képe? Igaz-e, hogy* $A \circ B = B \circ A$*?*

10. *Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$