Bsc algebra1 alapszintű gyakorlat

Tizedik alkalom (2006 nov. 21–24)

1. *Az AB, BA, BC, $CB - C$ műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. *Adjunk meg olyan 10×10-es $A \neq B$ mátrixokat és egy 10×100-as $C \neq 0$ mátrixot, amelyekre $AC = BC$ teljesül. Meg lehet-e adni az $A \neq B$ mátrixokat úgy is, hogy ez* **minden** *10×100-as C-re teljesüljön?*

3. *Számítsuk ki az 5×5-ös $N = ((n_{ij}))$ mátrix első öt hatványát, ahol $n_{ij} = 1$, ha $i - j = 1$, és 0 egyébként. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$-es $M = ((m_{ij}))$ mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz $m_{ij} = 0$ ha $i \geq j$). Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.*

4. *Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonálisában?*

5. *Jelölje $E^{(ij)}$ azt a mátrixot, amelynek i-edik sorában a j-edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról illetve jobbról megszorzunk $E^{(ij)}$-vel? Van-e olyan 3×3-as A mátrix, amellyel a balszorzás tetszőleges 3×3-as X mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az X többi elemét pedig ellentettjére változtatja? Van-e ilyen A akkor, ha balszorzás helyett jobbról akarunk szorozni?*

6. *Számítsuk ki az alábbi szorzatokat.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

7. *Legyenek A és B $n \times n$-es mátrixok, számítsuk ki $tr(AB - BA)$ értékét. Itt $tr(M)$ az M négyzetes mátrix* **nyomát**, *azaz a főátlóban álló elemek összegét jelöli.*

8. *Mutassuk meg, hogy ha M kétszer kettes mátrix, akkor $M^2 - tr(M)M + \det(M)E = 0$.*

9. *Megoldható-e $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben az $X^2 = -E$ egyenlet? Adjuk meg az $X^2 = E$ egyenlet összes megoldását. Keressünk olyan mátrixokat, melyek négyzete nulla.*

10. *Legyen $M, N \in T^{n\times n}$ (ahol T test). Igazoljuk az alábbiakat.*

a) Ha $MN = M$ és $NM = N$, akkor mindkét mátrix **idempotens** *(azaz $N^2 = N$, illetve $M^2 = M$).*

b) Ha M idempotens, akkor $N = I - M$ is az, és $MN = NM = 0$.

c) Az M akkor és csak akkor **involúció**, *azaz $M^2 = I$, ha $(I + M)(I - M) = 0$.*

d) Ha M **nilpotens** *(azaz négyzetes, és van olyan m természetes szám, amire $M^m = 0$), akkor $(I - M)$-nek létezik inverze.*

11*. *Páratlanországban mindenki páratlan sok embernek küldött karácsonyi ajándékot. Bárhogy is választunk ki két különböző embert, azok száma, akiknek ők mindketten küldtek ajándékot, páros. Mutassuk meg, hogy mindenki páratlan számú ajándékot kapott.*

IHF. *Az M és N mátrixok* **felcserélhetők,** *ha $MN = NM$. Keressük meg az összes olyan háromszor hármas mátrixot, amely az $E^{(23)}$-mal felcserélhető (lásd 5. feladat), és azokat is, amelyek* **minden** *háromszor hármas mátrixszal felcserélhetők.*