Bsc algebra1 alapszintű gyakorlat

Első alkalom (2006 szept. 12–15)

A feladatok sorszámai az internetről letölthető Kiss-jegyzetre utalnak, amelyben a megoldások is elolvashatók.

1.1.2. *Megoldható-e az egész számok körében az* $x^2 + 5y = 1002$ *egyenlet?*

1.1.8, 1.1.9. *Írjuk föl a modulo 5 és a modulo 6 összeadás és szorzás táblázatát. Végezzük el a* $2:3$ *osztást modulo 5. Tudunk-e osztani* $\mathbb{Z}_5$ *minden nem nulla elemével? Igaz-e, hogy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla? Mi a helyzet modulo 6?*

1.1.11. *Az imént felírt modulo 5 műveleti táblázatok vizsgálatával mutassuk meg, hogy* $a^5 - a$ *minden egész* a*-ra osztható 5-tel. Milyen* a *egészekre igaz, hogy* $a^4 - 1$ *osztható 5-tel?*

1.1.12. *Milyen* a *egészekre teljesülnek az alábbi oszthatóságok?*
a) $6 \mid a^6 - a$.
b) $6 \mid a^5 - 1$.
c) $6 \mid a^2 - 1$.

1.1.13. *Igazoljuk a modulo 8 szorzás felhasználásával, hogy minden páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul. Mutassuk meg ezt az állítást közvetlen számolással is.*

1.1.14. *Adjunk meg a modulo 5 szorzástábla felhasználásával olyan* x *és* y *egészeket, melyre* $5x + 3y = 7$*. Véges, vagy végtelen sok megoldás van?*

1.1.15. *Mely* x *egész számokra teljesül, hogy* $5 \mid x^2 - 2x + 2$*? És az, hogy* $7 \mid x^2 - 2x + 2$*?*

1.1.16***.** *Mely* x *egészekre teljesül, hogy* $101 \mid x^2 - 2x + 2$*?, illetve* $101 \mid x^2 - 13x - 3$*?*

1.1.19***.** *Igazoljuk, hogy ha* p *is és* $p^2 + 2$ *is prímszám, akkor* $p^3 + 4$ *is az. Igaz-e, hogy ha* p *is és* $p^2 + 5$ *is prímszám, akkor* $p^3 + 4$ *is az?*

IHF. *Mely egyjegyű* n *számokra igaz a következő állítás: minden* m *egészre, ha* $n \mid m^2$*, akkor* $n \mid m$*.*

HF1. *Anettkának húsz tolla van, köztük piros is. Bármely öt toll között van két egyforma színű, és bármely tíz között legfeljebb öt egyforma színű lehet. Hány piros tolla van?*

HF2. *Hány számjegyből áll* $25^{25} \cdot 2^{50}$*?*

HF3. *Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely csak háromféle számjegyet tartalmaz?*

HF4. *Egy tábla csokoládé* $10 \cdot 30$ *kis téglalapra van osztva. A csokoládét szét szeretnénk törni ezekre a kis darabokra úgy, hogy mindig kezünkbe veszünk egy darabot, és egy osztás mentén eltörjük. Milyen stratégiával csináljuk, hogy a lehető legkevesebb törést kelljen elvégezni?*

HFK5. *Van 81 egyforma érménk, de az egyik hamis, könnyebb a többinél. Egy (súlyok nélküli) kétkarú mérleggel hány méréssel tudjuk megtalálni a hamisat?*

HFE6(1.1.1). *Lefedhető-e egy* 100×100*-as sakktábla* 8×1*-es dominókkal?*