Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Második zárthelyi (2005. május 17) — megoldásvázlatok

1. Az A_6 egyszerű csoport rendje 360 (2 pont). Egy 350 rendű csoportban az 5-Sylowok száma csak egy lehet, és így ez normálosztó (4 pont). *Második megoldás:* A 7-Sylowok száma vagy 1, vagy 50, utóbbi esetben Frobenius-csoportot kapunk.

2. Nem, mert S_4 rendje nem osztható $6 \cdot 5$-tel.

3. A triviálisakkal együtt 5 darab. A forgatások részcsoportja karakterisztikus, hiszen ez a 21 rendű elemek által generált részcsoport (1 pont). Ennek minden részcsoportja karakterisztikus, hiszen ez ciklikus, és így minden $d \mid 21$ esetén csak egy d rendű részcsoport van (2 pont). Mivel karakterisztikus részcsoport karakterisztikus részcsoportja karakterisztikus részcsoport, ezek D_{21}-ben is karakterisztikusak (1 pont). A tükrözések mind konjugáltak, és mivel generátorrendszert alkotnak, egy tükrözés sem lehet benne valódi karakterisztikus részcsoportban (2 pont).

4. Nincs. A mag elemszáma $24/3 = 8$, tehát a csoport foka 8 (1 pont). A Cauchy-tétel miatt van harmadrendű elem (2 pont), amely tehát hármasciklusok szorzata. Mivel $8 \equiv 2$ (3), ennek legalább két fixpontja van, ami lehetetlen (2 pont). *Második megoldás:* a stabilizátorok pontosan a 3-Sylow részcsoportok, hiszen egymás konjugáltjai (5 pont). Ez ellentmond a Sylow-tételnek, hiszen számuk 8 (1 pont).

5. Van. A $\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$ csoport automorfizmus-csoportja $\mathrm{GL}(2,5)$ (1 pont), melynek rendje $(25-1)(25-5)$ (1 pont), ami 3-mal osztható. Így Cauchy tétele miatt van benne harmadrendű elem (2 pont), és így készíthető $\mathbb{Z}_3^+$-szal nemtriviális szemidirekt szorzat (2 pont).

6. Igen. A hatás a Sylow-tételek miatt tranzitív (1 pont), azt kell belátni, hogy az egyik, P-vel jelölt 3-Sylow stabilizátora maximális részcsoport. Ez a stabilizátor a P-nek a H normalizátora (1 pont). A 3-Sylowok száma A_5-ben 10 (ez akár a hármasciklusok leszámlálásával, akár a Sylow-tétel alkalmazásából adódik, hiszen A_5 egyszerű, 1 pont). Ha $H < M < A_5$ lenne, akkor M indexe 2 vagy 5. Előbbi nem lehet, mert akkor M normálosztó lenne A_5-ben (1 pont). Ha pedig $|M : H| = 2$, akkor P karakterisztikus H-ban, ami normálosztó M-ben, azaz P normálosztó lenne M-ben, ami lehetetlen, hiszen P normalizátora csak H (2 pont).