Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév
Első zárthelyi (2005. április 12) — megoldásvázlatok

1. $(12, 6x^2, 3x^3) = (3) \cap (4, 2x^2, x^3)$, mert $(4, 2x^2, x^3)$ elemei azok a polinomok, amelyek konstans és x-es tagjának együtthatója osztható 4-gyel, az x^2-es tag együtthatója pedig 2-vel, és ha egy (ilyen) polinom osztható hárommal, akkor minden együtthatója is. A két tényező primér, hiszen az első prímideál (mert 3 prím $\mathbb{Z}[x]$-ben a Gauss-lemma miatt), a második pedig azért primér, mert a radikálja $(2, x)$ egy maximális ideál $\mathbb{Z}[x]$-ben.

2. Nem, a minimálpolinomja $\Phi_8(2x+1) = (2x+1)^4 + 1$, ami normálva nem egész együtthatós. *Második megoldás:* Ha algebrai egész lenne, akkor a konjugáltjával összeadva $(\varepsilon + \bar{\varepsilon})/2 - 1$ is algebrai egész, vagyis $(\varepsilon + \bar{\varepsilon})/2 = \pm\sqrt{2}/2$ is az, ami lehetetlen, hiszen e szám négyzete racionális, de nem egész.

3. A radikál azokból a törtekből áll, amelyek számlálója 70-nel osztható. Valóban, ezek ideált alkotnak, és $1 - 70a/b = (b - 70a)/b$, ami invertálható, hiszen a számlálója 70-hez relatív prím. Ha viszont $r = a/b$ a radikálban van, akkor $1 - sr$ invertálható minden $s \in R$ esetén. Speciálisan $1 - nr = (b - na)/b$ invertálható minden n egészre, vagyis $b - na$ relatív prím a 70-hez. Ha a nem lenne osztható héttel, akkor az $na \equiv b$ (7) kongruencia megoldható lenne n-re, ami ennek a feltételnek ellentmond. Hasonlóan látható, hogy a osztható 2-vel és 5-tel is. A radikál indexe 70, hiszen a $0, 1, \ldots, 69$ számok reprezentánsrendszert alkotnak. *Második megoldás:* Könnyű kiszámolni, hogy R-nek három maximális ideálja van: (2), (5) és (7), a radikál ezek metszete, vagyis (70).

4. $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+, A) \cong A$ és $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}_m^+) \cong \mathbb{Z}_{(n,m)}$, így $\mathrm{Hom}(\varphi, \psi)$ a $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_8^+, \mathbb{Z}_2^+) \cong \mathbb{Z}_2^+$ csoportot képezi a $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}_4^+) \cong \mathbb{Z}_4^+$ csoportba, és így eleve nem lehet szürjektív. Viszont injektív: a $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_8^+, \mathbb{Z}_2^+)$ egyetlen nem nulla α eleme az, amelyre $\alpha(1) = 1$, ennek képe $\mathrm{Hom}(\varphi, \psi)$-nél $\psi \circ \alpha \circ \varphi$, amely az $1 \in \mathbb{Z}^+$ elemet $2 \in \mathbb{Z}_4^+$-ba viszi, és ez nem nulla.

5. Nyilván $1 = a \vee b \vee c$ az L háló legnagyobb, és $0 = a \wedge b \wedge c$ a legkisebb eleme. Legyen $K = \{1, a, b, c, a \wedge b, a \wedge c, b \wedge c, 0\}$, belátjuk, hogy ez részháló. Nyilván zárt a metszetre. A moduláris szabály miatt $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = a \wedge 1 = a$. Hasonlóan $(b \wedge a) \vee (b \wedge c) = b$ és $(c \wedge a) \vee (c \wedge b) = c$. Tudjuk, hogy $a \vee (b \wedge c) = 1$ és $a \vee (a \wedge c) = a$, tehát az összes típusú egyesítést végignéztük. Így L legfeljebb 8 elemű, ami Boole-algebrával meg is valósítható. Az állítás a szabad moduláris háló rajzából is következik.

6. Nem injektív. Legyen F az $\mathbb{R}[x]$, mint önmaga fölötti modulus, $\varphi(p(x)) = (x-1)p(x)$ beágyazás F-ből F-be, továbbá $\alpha : F \to M$ az a homomorfizmus, amelyre $\alpha(p(x)) = p(1)$. Ha M injektív lenne, akkor létezne olyan $\beta : F \to M$, melyre $\beta \circ \varphi = \alpha$. Ide 1-et helyettesítve az $1 = \beta(x-1) = (x-1)\beta(1) = (1-1)\beta(1) = 0$ ellentmondás adódik. *Második megoldás:* Az $\mathbb{R}[x]$ főideálgyűrű, így az injektív modulusok oszthatók. Viszont M-ben nem lehet $x - 1$-gyel osztani, mert minden elem $x - 1$-szerese nulla.

II/5. Ha $(xy, z) = AB$ az A, B ideálokra, akkor $AB \subseteq (x, z)$ miatt $A \subseteq (x, z)$ vagy $B \subseteq (x, z)$, hiszen (x, z) prímideál; szimmetria miatt feltehető, hogy $A \subseteq (x, z)$. Hasonlóan $A \subseteq (y, z)$ vagy $B \subseteq (y, z)$. A második esetben $z \in (xy, z) = AB \subseteq (x, z)(y, z)$ lenne, ami nem igaz. Az első esetben $(x, yz) = AB \subseteq A \subseteq (x, z) \cap (y, z) = (xy, z)$ miatt $A = (xy, z)$. Így A nem primér. (Be lehet látni, hogy ilyenkor B csak az egész gyűrű lehet.)