

Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Első zárthelyi (2005. április 12)

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a pusztán eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Az osztályzat nem kisebb a teljesen megoldott példák számánál.

1. Bontsuk fel a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrűben a $(12, 6x^2, 3x^3)$ ideált primér ideálok metszetére.
2. Legyen ε primitív nyolcadik egységgyök. Algebrai egész-e $(\varepsilon - 1)/2$?
3. Legyen R azoknak a racionális számoknak a részgyűrűje, amelyek nevezője 70-hez relatív prím. Határozzuk meg R Jacobson-radikálját, és ennek indexét R -ben.
4. Legyen $\varphi : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}_8^+$ a mod 8 maradék képzése, és $\psi : \mathbb{Z}_2^+ \rightarrow \mathbb{Z}_4^+$ az egyetlen beágyazás. Injektív-e, illetve szürjektív-e a $\text{Hom}(\varphi, \psi)$ leképezés?
5. Az L moduláris hálót generálják az a, b, c elemek, amelyek közül bármelyiknek a másik kettő metszetével való egyesítése a háló legnagyobb eleme. Maximum hány elemű az L ?
6. Legyen $M = \mathbb{R}^+$ modulus az $\mathbb{R}[x]$ fölött, ahol a szorzást a $p(x)r = p(1)r$ képlettel értelmezzük. Injektív-e ez a modulus?