Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Hetedik (utolsó) alkalom (2005. május 3-10)

1. *Hasson a G csoport tranzitívan az X halmazon, és legyen H az $a \in X$ elem G-beli stabilizátora. Mutassuk meg, hogy a $\varphi(gH) = g * a$ leképezés jóldefiniált, és bijektív a H szerinti baloldali mellékosztályok halmaza és X között. Igazoljuk azt is, hogy G hatása a H szerinti bal mellékosztályok halmazán φ szerint ekvivalens az X-en való hatással.*

2. *Igazoljuk, hogy ha H és K részcsoportok egy G csoportban, akkor a G hatása a H szerinti bal mellékosztályokon akkor és csak akkor ekvivalens a K szerinti bal mellékosztályokon való hatással, ha H és K konjugáltak G-ben.*

3. *Mutassuk meg, hogy ha G tranzitívan hat az X halmazon, és $b \in X$, akkor tetszőleges $k > 1$ esetén G hatása X-en akkor és csak akkor k-tranzitív, ha b stabilizátorának hatása $X - \{b\}$-n $k-1$-tranzitív. Mi a helyzet a szigorúan tranzitív hatással?*

4. *Mutassuk meg, hogy ha a G csoport k-tranzitívan hat egy n elemű halmazon, akkor $n(n-1)\dots(n-k+1)$ osztója G rendjének, és itt oszthatóság helyett akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha a hatás szigorúan k-tranzitív.*

5. *Igazoljuk, hogy ha V vektortér, akkor az eltolások egy N normálosztót alkotnak $\mathrm{Aff}(V)$-ben, amely izomorf V additív csoportjával. Mutassuk meg azt is, hogy $\mathrm{Aff}(V)$ az N normálosztó és $\mathrm{GL}(V)$ szemidirekt szorzata, ahol egy M lineáris transzformáció e szemidirekt szorzatban konjugálással úgy hat N-en, ahogy szorzással hat a V vektortéren.*

6. *Milyen n és T esetén hat $\mathrm{Aff}(n,T)$ (szigorúan) 2-, 3-, 4-tranzitívan a T^n halmazon?*

7. *Igazoljuk tetszőleges T test esetén, hogy $\mathrm{L}(T) \cong \mathrm{PGL}(2,T)$, és hogy a $T \cup \{\infty\}$ projektív egyenesen $\mathrm{L}(T)$ szigorúan 3-tranzitívan hat. ($\mathrm{L}(T)$ a törtlineáris leképezések csoportja.)*

8. *Legyen X egy G csoport H részcsoportja szerinti bal mellékosztályainak a halmaza. Mutassuk meg, hogy az X permutációcsoport kongruenciái pontosan azok a partíciók, amelyek egy $H \le K \le G$ részcsoportból adódnak a következőképpen: $aH \sim bH$ akkor és csak akkor, ha aH és bH ugyanazon K szerinti baloldali mellékosztályban vannak.*

9. *Igazoljuk, hogy primitív permutációcsoport nemtriviális normálosztója tranzitív.*

10. *Az alábbi permutációcsoportokról döntsük el, hogy primitívek-e (illetve mikor azok): A_3, A_4, az A_4 csoport négyelemű normálosztója, a D_n csoport a szabályos n-szög csúcsain, a kocka szimmetriacsoportja a kocka csúcsain, élein és lapjain, tetszőleges G véges csoport automorfizmus-csoportja a $G - \{1\}$ halmazon.*

11. *Bizonyítsuk be, hogy ha G egy legalább háromelemű halmazon hat, és csak triviális kongruenciája van, akkor primitív.*

12. *Mutassuk meg, hogy ha N minimális normálosztó a $G \le S_X$ csoportban, és N Abel-féle és tranzitív, akkor G primitív.*

13*. *Bizonyítsuk be, hogy ha G primitív permutációcsoport egy legalább háromelemű, páros elemszámú halmazon, akkor $|G|$ osztható néggyel.*

Fordíts!

14. *Legyen N tranzitív normálosztója a $G \leq S_X$ csoportnak, és H az $a \in X$ elem G-beli stabilizátora.*
a) *Mutassuk meg, hogy $G = NH$, és ha $h \in H$ az N minden elemével felcserélhető, akkor h az egységelem.*
b) *Tegyük fel, hogy N reguláris. Legyen $\varphi(n) = n(a)$. Igazoljuk, hogy φ bijekciót létesít N és X között, és H hatása $X - \{a\}$-n φ szerint ekvivalens a H konjugálással való hatásával $N - \{1\}$-en.*

15. *Mutassuk meg, hogy ha X véges, és $G \leq S_X$ feloldható, primitív részcsoport, akkor $|X|$ prímhatvány, és G beágyazható $\mathrm{Aff}(n, p)$-be. Speciálisan ha p prím, akkor S_p feloldható részcsoportjai pontosan $\mathrm{Aff}(1, p)$ részcsoportjai.*

16. *Legyen G egy k-tranzitív részcsoportja S_n-nek, amelyben van egy reguláris normálosztó. Mutassuk meg, hogy $k \leq 4$, és ha $k = 3$, akkor $G \leq S_4$.*

17. *Igazoljuk, hogy ha $G \leq S_X$ Frobenius-csoport, és H az $a \in X$ stabilizátora, akkor $g \in G - H$ esetén $H \cap gHg^{-1} = \{1\}$. Megfordítva, tegyük fel, hogy a G csoportnak H ilyen tulajdonságú részcsoportja. Mutassuk meg, hogy akkor G hatása H bal mellékosztályain Frobenius-csoportot ad, melynek N magja az egységelemen kívül azokból az elemekből áll, melyek H egyetlen konjugáltjában sincsenek benne, a stabilizátorok pedig pontosan H konjugáltjai lesznek (ezeket a Frobenius-csoport* **komplementumainak** *nevezzük).*

18. *Legyen $G \leq S_X$ Frobenius-csoport, melynek magja $N \lhd G$, és az $a \in X$ pont stabilizátora H. Mutassuk meg, hogy G az N és a H szemidirekt szorzata. Igazoljuk azt is, hogy egyetlen olyan hatása létezik G-nek az N halmazon, ahol H elemei konjugálással, N elemei pedig balszorzással hatnak, és ez a hatás ekvivalens a G csoport X-en való hatásával.*

19. *Igazoljuk az alábbi csoportokról, hogy Frobenius-csoportok: S_3, D_{2n+1}, A_4, $\mathrm{Aff}(1, T)$, minden pq rendű nemkommutatív csoport (p, q prímek). Mi a mag és a komplementumok?*

20. *Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $N \rtimes_\varphi H$ szemidirekt szorzat olyan Frobenius-csoport legyen, melynek magja N, egyik komplementuma pedig H?*

21. *Igazoljuk, hogy minden nemtriviális, véges, tranzitív permutációcsoportban van fixpontmentes elem.*

22. *Bizonyítsuk be, hogy $G/Z(G)$ izomorf G belső automorfizmusainak csoportjával.*

23. *Határozzuk meg az S_n csoport összes normálosztóját.*

---

24. *Bontsuk fel a $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_2]$, $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_2^2]$, $\mathbb{C}[Q]$, $\mathbb{R}[Q]$, $\mathbb{C}[D_4]$, $\mathbb{C}[S_3]$ csoportalgebrákat a Wedderburn-Artin tétel szerint (Q a nyolcelemű kvaterniócsoport).*

25. *Adjuk meg a D_n diédercsoport egy másodfokú irreducibilis karakterét.*

26. *Írjuk fel a $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2^2$, S_3, D_4, Q, A_4, S_4, D_6 csoportok karaktertábláját.*

27. *Mutassuk meg, hogy ha $g \in G$ másodrendű elem, akkor minden χ karakterre $\chi(g)$ egész szám, sőt $\chi(g) - \chi(1)$ páros.*

28. *Legyen $N \lhd G$ és tegyük fel, hogy N nem része a χ_i irreducibilis karakter magjának. Igazoljuk, hogy $\sum_{g \in N} \chi_i(g) = 0$.*

29. *Igazoljuk, hogy G lineáris karaktereinek száma $|G : G'|$, magjaik metszete pedig G'.*