Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Hatodik alkalom (2005. április 26)

1. *Bizonyítsuk be, hogy* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n^+) \cong \mathbb{Z}_n^\times$ *és* $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}_p^+)^n) \cong \mathrm{GL}(n,p)$.

2. *Izomorfak-e egy „ismert” csoporttal az alábbi szemidirekt szorzatok? A következő jelölést használjuk:* $G = N \rtimes H$, *ahol* H *részcsoport,* N *normálosztó* G*-ben, és* $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ *az a leképezés, melyre* $\varphi(h)(n) = hnh^{-1}$.

a) $H = \mathbb{Z}_2^+$, $N = \mathbb{Z}_n^+$, $\varphi(1)$ *minden elemet invertál.*
b) $H = \mathbb{Z}_2^+$, $N = \{e, a, b, c\}$ *a Klein-csoport,* $\varphi(1)$ *az* (ab) *transzpozíció.*
c) $H = \mathbb{Z}_3^+$, $N = \{e, a, b, c\}$ *a Klein-csoport,* $\varphi(1)$ *az* (abc) *ciklus.*
d) $H = D_3$, $N = \{e, a, b, c\}$ *a Klein-csoport,* $\varphi(t) = (ab)$, $\varphi(f) = (abc)$.
e) $H = D_3$, $N = \{e, a, b, c\}$ *a Klein-csoport,* $\varphi(t) = (ab)$, $\varphi(f) = \mathrm{id}$.
f) $H = \mathbb{Z}_4^+$, $N = \mathbb{Z}_3^+$, $\varphi(1) = (12)$.

3*. *Mely véges csoportoknak van másodrendű fixpontmentes automorfizmusa? (Egy automorfizmus fixpontmentes, ha csak az egységelemet viszi önmagába).*

4. *Igazoljuk, hogy minden* $G = N \rtimes H$ *szemidirekt szorzat tényleg csoport, amelyben az* N*-nek megfelelő* N^* *részhalmaz normálosztó, a* H*-nak megfelelő* H^* *részhalmaz részcsoport,* H^* *úgy hat konjugálással* N^**-on, ahogy a* φ *leképezés előírja,* $G = N^*H^*$, *és* $G/N^* \cong H^*$.

5. *A* G *csoport egy* N *részcsoportját* **karakterisztikus** *részcsoportnak nevezzük, ha* N *invariáns* G *összes automorfizmusára, azaz* $g \in N$ *és* $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ *esetén* $\alpha(g) \in N$. *Bizonyítsuk be a következő állításokat.*

a) *Egy ciklikus csoport minden részcsoportja karakterisztikus.*
b) *Ha* G*-ben egy Sylow részcsoport normálosztó, akkor karakterisztikus is.*
c) *Ha* A *(additív) Abel-csoport, és* n *pozitív egész, akkor* nA *és* $A[n]$ *karakterisztikus.*
d) *A centrum mindig karakterisztikus részcsoport.*
e) *Ha* K *és* L *karakterisztikus, akkor* $[K, L]$ *is az.*
f) G *minden karakterisztikus részcsoportja normálosztó* G*-ben.*
g) *A „normálosztónak lenni” reláció általában nem tranzitív.*
h) *Ha* $N \triangleleft G$, *akkor* N *minden karakterisztikus részcsoportja normálosztó* G*-ben.*
i) *A „karakterisztikus részcsoportnak lenni” reláció tranzitív.*

6. *Bizonyítsuk be, hogy egy feloldható csoportban minden minimális normálosztó* **elemi Abel-féle** p**-csoport**, *azaz izomorf* $\mathbb{Z}_p^n$*-nel valamilyen* p *prímre és* n *egészre.*

7. *Igazoljuk, hogy feloldható csoport maximális részcsoportjának indexe prímhatvány.*

8*. *Bizonyítsuk be, hogy ha a* G *véges csoport* **karakterisztikusan egyszerű**, *azaz csak a két triviális karakterisztikus részcsoportja van, akkor* G *egymással izomorf egyszerű csoportok direkt szorzata.*

9. *Igazoljuk az* $[x, yz] = [x, y]y[x, z]y^{-1}$ *azonosságot, és ebből azt, hogy ha* K, L, N *normálosztók egy csoportban, akkor* $[K, LN] = [K, L][K, N]$. *Igazoljuk, hogy* $[K, L] \subseteq K \cap L$.

10. *Igaz-e, hogy* $(A \times B)' = A' \times B'$?

11. *Bizonyítsuk be, hogy a feloldhatóság bővítésre öröklődik (azaz, hogy ha* G/N *és* N *feloldható, akkor* G *is), és hogy két feloldható normálosztó szorzata is feloldható.*