Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Negyedik alkalom (2005. március 8. – április 5.)

Ezen a feladatsoron minden gyűrű egységelemes. Az R gyűrű *Jacobson-radikálja* azon $r \in R$ elemek halmaza, melyekre $1 - sr$ balinvertálható minden $s \in R$-re. Egy I ideál *nilpotens*, ha van olyan n, hogy $I^n = 0$ (vagyis I bármely n elemének szorzata nulla). Egy modulus *teljesen reducibilis*, ha az egyszerű részmodulusainak összege. Az M modulus M_α $(\alpha \in A)$ részmodulusai *függetlenek*, ha összegük direkt összeg (azaz bármelyiknek a többi összegével vett metszete nulla).

1. *Határozzuk meg az alábbi gyűrűk radikálját: egy főideálgyűrű egy faktorgyűrűje; a páratlan nevezőjű törtek; a 2-hatvány nevezőjű törtek; a komplex felső háromszögmátrixok.*

2. *Bontsuk fel az alábbi gyűrűk radikál szerinti faktorát ferdetest feletti mátrixgyűrűk direkt szorzatára:* $\mathbb{Z}_{12}$; $\mathbb{Z}_n$; $\mathbb{R}[x]/(x^2+2)$; $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)$; $\mathbb{G}/(5)$; $\mathbb{G}/(3)$, *a valós* $n \times n$*-es felső háromszögmátrixok. (Itt* $\mathbb{G}$ *a Gauss-egészek gyűrűje.)*

3. *Mutassuk meg, hogy a radikálban csak a nulla lehet idempotens elem.*

4. *Igazoljuk, hogy minden véges gyűrű kommutatív, melyben igaz az* $x^n = x$ *azonosság. Mutassuk meg, hogy az állítás végtelen gyűrűre is igaz, annak felhasználásával, hogy végtelen ferdetestre igaz. (Végtelen ferdetestre is igaz, de ez nehezebb.)*

5. *Legyen* M *baloldali* R*-modulus,* $D = \mathrm{End}_R(M)$*, és* D^* *a* D*-ből a szorzás megfordításával kapott gyűrű:* $r * s = sr$*. Igazoljuk, hogy* M *egy* $R - D^*$ *bimodulussá válik az* $m\varphi = \varphi(m)$ *definícióval (azaz* M *jobboldali* D^**-modulus, és az* $(rm)\varphi = r(m\varphi)$ *azonosság is teljesül tetszőleges* $r \in R$, $m \in M$ *és* $\varphi \in D$ *esetén).*

6. *Legyen* D *ferdetest, és* D^* *a* D*-ből a szorzás megfordításával kapott gyűrű. Ha* $v \in D^n$ *és* $\lambda \in D$*, akkor a* $v\lambda$ *szorzatot értelmezzük komponensenként. Az* $M = D^n$ *Abel-csoportot tegyük bal modulussá a* $D^{n\times n}$ *mátrixgyűrű fölött a szokásos mátrix-vektor szorzásra. Mutassuk meg, hogy* $\mathrm{End}_R(M)$ *elemei pontosan a* $\varphi_\lambda : v \mapsto v\lambda$ *alakú leképezések, és így a* $\lambda \mapsto \varphi_\lambda$ *megfeleltetés izomorfizmus* $\mathrm{End}_R(M)$ *és* D^* *között. Mely* $\lambda \mapsto \lambda v$ *leképezések lesznek modulus-endomorfizmusok?*

7***.** *Igazoljuk, hogy ha* x *eleme a radikálnak, akkor* $1-x$*-nek van jobbinverze is. Mutassuk meg, hogy a radikál nem függ attól, hogy bal- vagy jobboldali modulusokkal definiáljuk, és hogy féligegyszerű gyűrű esetén a bal- és jobboldali Artin-tulajdonság is ekvivalens.*

8***.** *Legyen* J *maximális balideálja az* R *gyűrűnek, és* I *az* R/J *faktormodulus annullátora.*
- *a) Igazoljuk, hogy* I *a legnagyobb olyan ideálja* R*-nek, mely része* J*-nek.*
- *b) Legyen* $0 \neq u \in R/J$*. Mutassuk meg, hogy* u *annullátora maximális balideál.*
- *c) Mutassuk meg, hogy* I *előáll az* R *alkalmas, maximális balideáljainak metszeteként.*
- *d) Vezessük le ebből, hogy* R *radikálja a maximális balideálok metszete.*

---

9. *Vezessük le a disztributív azonosságból a moduláris szabályt.*

10. *Mutassuk meg, hogy moduláris hálóban nem lehet egy elemnek két különböző összehasonlítható komplementuma.*

11. *Igazoljuk, hogy komplementumos moduláris háló intervalluma is komplementumos.*

12. *A valós projektív síkon tekintsük a pontok, és az egyenesek halmazát. Mutassuk meg, hogy ezek az üres halmazzal és az egész síkkal kiegészítve moduláris hálót alkotnak. Egyszerű ez a háló? Négy általános helyzetű pont hány elemű részhálót generál?*

13. *Mutassuk meg, hogy ha egy véges hálóban a magasságfüggvény teljesíti a dimenzió-egyenlőséget, akkor a háló moduláris.*

14. *Igazoljuk, hogy az intervallum-izomorfizmus tétel csak moduláris hálóban érvényes.*

15****.** *Bizonyítsuk be, hogy minden halmaz partícióhálója egyszerű.*

16***.** *Igazoljuk, hogy ha a G csoport direkt négyzetének részcsoporthálója moduláris, akkor G-ben minden részcsoport normálosztó.*

17***.** *Bizonyítsuk be, hogy ha egy véges moduláris hálóban a nullát fedő elemek (azaz az atomok) egyesítése* 1*, akkor a háló komplementumos.*

18***.** *Bizonyítsuk be a Jordan-Dedekind tételt.*

19***.** *Bizonyítsuk be, hogy ha egy kongruencia-felcserélhető varietásban az A algebra a $B_1, \dots, B_n$ egyszerű algebrák szubdirekt szorzata, akkor A izomorf néhány B_i algebra direkt szorzatával.*

20***.** *Bizonyítsuk be, hogy egy kongruencia-felcserélhető varietásban egy algebra minden kompatibilis, reflexív relációja kongruencia.*

21***.** *Bizonyítsuk be, hogy ha A a B és C algebrák szubdirekt szorzata egy kongruencia-felcserélhető varietásban, akkor van olyan θ kongruencia B-n, és olyan ψ kongruencia C-n, valamint egy $\varphi : B/\theta \to C/\psi$ izomorfizmus úgy, hogy $A = \{(b, c) \mid \varphi(b/\theta) = c/\psi\}$.*

22*****.** *Mutassuk meg, hogy ha egy varietásban a véges algebrák között csak véges sok direkt irreducibilis van, akkor a varietás véges algebrái kongruencia-felcserélhetőek.*

23***.** *Legyen az M modulus az M_α ($\alpha \in A$) egyszerű részmodulusainak összege, és N egy részmodulusa M-nek. Mutassuk meg, hogy van olyan $B \subseteq A$, hogy M_β ($\beta \in B$) függetlenek, és ha (direkt) összegüket K jelöli, akkor $M = N \oplus K$.*

24***.** *Legyen M az M_α ($\alpha \in A$) egyszerű részmodulusainak összege. Bizonyítsuk be, hogy*
a) *M minden része és faktora is teljesen reducibilis, és minden része direkt összeadandó;*
b) *M minden egyszerű része illetve faktora izomorf valamelyik M_α modulussal.*

25***.** *Legyen R egyszerű gyűrű, melynek van egy J minimális balideálja. Igazoljuk, hogy ${}_RR$ teljesen reducibilis modulus, és minden egyszerű R-modulus izomorf ${}_RJ$–vel.*

26***.** *Legyen az R gyűrű k darab ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű direkt szorzata. Mutassuk meg, hogy R felett pontosan k darab nemizomorf egyszerű modulus van.*

27***.** *Mutassuk meg, hogy az R gyűrűre az alábbiak ekvivalensek:* (1) *minden R-modulus projektív (injektív);* (2) *minden R-modulus minden részmodulusa direkt összeadandó;* (3) *minden R-modulus teljesen reducibilis;* (4) *az R féligegyszerű Artin-gyűrű.*