Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Harmadik alkalom (2005. március 1.)

1. *Racionális szám-e* $\sqrt[127]{2} + \sqrt[298]{3+\sqrt{5}}$?

2. *Bizonyítsuk be, hogy az* $\alpha \in \mathbb{C}$ *szám akkor és csak akkor algebrai egész, ha* $\mathbb{Q}$ *feletti (normált) minimálpolinomja egész együtthatós.*

3. *Mely* $a, b \in \mathbb{Q}$ *számokra lesz* $a + bi$, *illetve* $a + b\sqrt[3]{2}$ *algebrai egész?*

4. *Határozzuk meg a* $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ *illetve a* $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ *gyűrűk (testek) algebrai egész elemeit.*

5. *Van-e olyan 1 abszolút értékű komplex szám, ami nem egységgyök, de algebrai egész?*

6. *Mely fokokban mérve racionális* α *szögekre lesz* $\cos\alpha$ *racionális szám?*

7*. *Legyen* M *egy* $n \times n$*-es komplex elemű mátrix, amelynek valamelyik hatványa az egységmátrix. Mutassuk meg, hogy ha* M *nyoma egy algebrai egész* n*-szerese, akkor ez a nyom vagy nulla, vagy* M *skalármátrix (az egységmátrix skalárszorosa).*

8*. *Legyen az* $f(x)$ *polinom minden együtthatója algebrai egész.*

a) *Igaz-e, hogy ha* f *normált, akkor minden gyöke algebrai egész?*

b) *Igazoljuk, hogy ha* f *tetszőleges számú gyökének szorzatát megszorozzuk* f *főegyütthatójával, akkor algebrai egészet kapunk.*

---

9. *Legyen* K *test és* $c_1, \ldots, c_n \in K$.

a) *Igazoljuk, hogy a* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *polinomgyűrű minden eleme egyértelműen felírható* $x_1 - c_1, \ldots, x_n - c_n$ *polinomjaként.*

b) *Legyen* $\varphi : K[x_1, \ldots, x_n] \to K$ *az a homomorfizmus, amely az* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *polinomhoz* $f(c_1, \ldots, c_n)$*-et rendel (vagyis a* $c_1, \ldots, c_n$ *behelyettesítése). Mutassuk meg, hogy* φ *magja az* $x_1 - c_1, \ldots, x_n - c_n$ *által generált ideál.*

10. *Határozzuk meg a* $\mathbb{C}[x, y]$ *gyűrű összes olyan maximális ideálját, illetve prímideálját, amely az* $(x^2 + y^2 - 1)^2$ *és az* $(x - y - 1)^3$ *polinomot is tartalmazza. Hogyan segít ez a fenti két polinom által generált ideál radikáljának meghatározásában?*

11*. *Igaz-e, hogy* $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ *minden maximális ideálja véges indexű, és alkalmas* p *prímre és* $m > 0$ *egészre tartalmazza a* $(p, x_1^{p^m} - x_1, \ldots, x_n^{p^m} - x_n)$ *ideált?*

12*. *Határozzuk meg a véges injektív és projektív modulusokat* $\mathbb{Z}_n$ *fölött.*

13*. *Bizonyítsuk be, hogy*

a) *projektív (injektív) modulus direkt összeadandója is az;*

b) *injektív modulusok direkt szorzata is az, és ennek a duálisát;*

c) *kommutatív gyűrű felett projektív modulusok tenzorszorzata is az;*

d) *főideálgyűrű fölött projektív* $\iff$ *szabad és injektív* $\iff$ *osztható.*

14*.** *Mutassuk meg, hogy minden modulus beágyazható injektív modulusba. Segédállítás: ha* A *osztható Abel-csoport, akkor* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$ *injektív* R*-modulus.*

15*. *Igazoljuk, hogy egy kommutatív, egységelemes gyűrű pontosan akkor Noether, ha minden prímideálja végesen generált, és pontosan akkor főideálgyűrű, ha minden prímideálja főideál.*