Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Második alkalom (2005. február 22.)

Egy kommutatív, egységelemes gyűrű *Noether-féle,* ha ideáljaira igaz a maximum-feltétel: ideálok minden nem üres halmazában van tartalmazásra maximális. *Hilbert bázis-tétele:* ha R Noether, akkor $R[x]$ is. A P ideál *prímideál,* ha $ab \in P$ esetén $a \in P$ vagy $b \in P$. A Q ideál *primér ideál,* ha $ab \in Q$, de $a \notin Q$ esetén van olyan n egész, hogy $b^n \in Q$. *Noether–Lasker-tétel:* minden ideál előáll (bizonyos értelemben egyértelműen) primér ideálok metszeteként. Az I ideál *radikálja* azon elemek halmaza, amelyek I-be hatványozhatók.

1. *Igaz-e, hogy a $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ az $x_1, \ldots, x_n$ által generált szabad kommutatív gyűrű, illetve szabad egységelemes kommutatív gyűrű? (Az egységelemet külön műveletnek tekintjük.)*

2. *Igazoljuk, hogy ha R kommutatív, egységelemes gyűrű, akkor*
- *a)* $(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_m) = (\ldots, a_i b_j, \ldots)$;
- *b) a P ideál akkor és csak akkor prímideál, ha tetszőleges A és B ideálokra $AB \subseteq P$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq P$ vagy $B \subseteq P$;*
- *c) tetszőleges ideál radikálja is ideál;*
- *d) ha R főideálgyűrű, akkor P pontosan akkor prímideál, ha a generátora prím, és pontosan akkor primér, ha a generátora egy prímhatvány.*

3. *Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C}[x, y]$ gyűrű $I = (x^2, xy)$ ideálja nem primér, de tetszőleges p és q polinomokra igaz, hogy ha $pq \in I$, akkor p és q valamelyike belehatványozható I-be, és hogy az I radikálja prímideál. Melyik ideál ez a radikál?*

4. *Igazoljuk, hogy a $\mathbb{C}[x, y]$ gyűrű (x^2, y) ideálja primér, de nem hatványa a radikáljának.*

5. *Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C}[x, y, z]$ gyűrű (xy, z) ideálja nem állítható elő primér ideálok szorzataként. Állítsuk elő primér ideálok metszeteként.*

6. *Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Z}[x]$ gyűrű $(2, x)^2 = (4, 2x, x^2)$ ideálja primér, de nem metszet-irreducibilis, mert előáll $(4, x)$ és $(2, x^2)$ metszeteként.*

7. *Állítsuk elő a $\mathbb{C}[x, y]$ gyűrű alábbi ideáljait primér ideálok metszeteként, és a felbontás tényezőinek adjuk meg a radikálját is: (xy), (xy^2), (x^2, xy), $(x^2 + y^2)$, (x^2, y^2), (x^2, y^3), (x^2, xy, y^2), (x^2, xy^2, y^3), (x^3, x^2y^2, xy^3).*

8. *Legyen R egységelemes, kommutatív Noether-gyűrű. Igazoljuk az alábbi állításokat.*
- *a) Minden primér ideál tartalmazza a radikáljának egy hatványát.*
- *b) Ha Q_i véges sok primér ideál, melyek mindegyikének a radikálja ugyanaz a P prímideál, akkor a Q_i ideálok metszete is primér, és a metszet radikálja szintén P.*
- *c) Ha Q_i véges sok primér ideál, melyek radikáljai páronként különbözők, akkor a Q_i ideálok metszete, ha rövidíthetetlen, akkor nem primér.*

9. *Igazoljuk, hogy ha R kommutatív egységelemes gyűrű, és $R[x]$ Noether, akkor R is.*

10*. *Legyen R egységelemes integritási tartomány. Igazoljuk az alábbi állításokat.*
- *a) $R[x]$ akkor és csak akkor főideálgyűrű, ha R test.*
- *b) Ha R alaptételes, és minden nem nulla ideálja véges indexű, akkor R főideálgyűrű.*