Matematikus gyakorlat, második évfolyam, második félév

Első alkalom (2005. február 15), KÉTOLDALAS FELADATSOR!

Ha A Abel-csoport és $n \in \mathbb{Z}$, akkor $nA = \{na \mid a \in A\}$ és $A[n] = \{a \in A \mid na = 0\}$. Az A csoport *osztható*, ha az $nA = A$ minden $0 \neq n \in \mathbb{Z}$-re. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ a komplex p-hatványadik egységgyökök csoportja a szorzásra (p prím).

1. *Igazoljuk az alábbi állításokat (R kommutatív, A, B, C, D unitér bal R-modulusok).*
a) $\mathrm{Hom}({}_R R, A) \cong A$.
b) $\mathrm{Hom}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(B, C)$.
c) $\mathrm{Hom}(A, C \times D) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(A, D)$.

2. *Számítsuk ki $A = \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}_m^+, \mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Q}^+$ esetén* $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_A, \varphi)$*-t és* $\mathrm{Hom}(\varphi, \mathrm{id}_A)$*-t. Vizsgáljuk meg, hogyan függ össze φ és az eredmény injektivitása, illetve szürjektivitása.*
a) $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *az a homomorfizmus, ami minden elemhez az n-szeresét rendeli.*
b) $\varphi : \mathbb{Z}_m^+ \to \mathbb{Z}_{nm}^+$*, az n-nel szorzás.*
c) $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}_n^+$ *a mod n vett maradék képzése.*
d) φ *a* $\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Q}^+$ *beágyazás.*

3. *Legyen $\alpha : A \to B$ modulushomomorfizmus. Igazoljuk, hogy α akkor és csak akkor szürjektív, ha jobbról szabad vele egyszerűsíteni, azaz tetszőleges $\beta, \gamma : B \to C$ homomorfizmusokra $\beta\alpha = \gamma\alpha \implies \beta = \gamma$. Fogalmazzuk meg a duális (azaz a nyilak megfordításával kapott) tulajdonságot. Mely α homomorfizmusokra teljesül az?*

4. *Tegyük fel, hogy az alábbi diagram sora egzakt.*

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[d, "\eta"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \end{tikzcd}$$

Igazoljuk, hogy pontosan akkor van olyan $\varphi : M \to A$ homomorfizmus, ami a diagramot kommutatívvá teszi, ha $\beta\eta = 0$, és ilyenkor φ egyértelmű. Dualizáljuk az állítást.

5. *Legyen $\alpha, \beta \in$* $\mathrm{Hom}(A, B)$*. Bizonyítsuk be, hogy* $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Im}(\beta)$ *pontosan akkor, ha tetszőleges $\varphi : B \to C$ homomorfizmusra $\varphi\beta = 0 \implies \varphi\alpha = 0$. Dualizáljuk az állítást.*

6. *Bizonyítsuk be, hogy az $\alpha : A \to B$ homomorfizmus pontosan akkor képzi le A-t injektíven a B egy direkt összeadandójára, ha van balinverze. Dualizáljuk az állítást.*

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ \alpha\ } B \xrightarrow{\ \beta\ } C \longrightarrow 0$$

egzakt sorozat, akkor tetszőleges M modulusra az alábbiak is egzaktak:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_M, \alpha)} \mathrm{Hom}(M, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_M, \beta)} \mathrm{Hom}(M, C)$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta, \mathrm{id}_M)} \mathrm{Hom}(B, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha, \mathrm{id}_M)} \mathrm{Hom}(A, M)$$

8. *Adjunk példát arra, hogy* $\mathrm{Hom}(A,B)$*-n a természetes szorzás nem ad modulust.*

9. *Számítsuk ki az* $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_3^+,\mathbb{Z}_3^+)$ *csoportot a faktorrendszerek felírásával.*

10. *Tegyük fel, hogy az alábbi diagram kommutatív, és a sorai egzaktak. Igazoljuk, hogy*
a) ha γ_1 *epi, és* γ_2, γ_4 *mono, akkor* γ_3 *is mono;*
b) ha γ_5 *mono, és* γ_2, γ_4 *epi, akkor* γ_3 *is epi.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\
{\scriptstyle\gamma_1}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma_2}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma_3}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma_4}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma_5}\downarrow \\
B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5
\end{array}$$

11. *Tegyük fel, hogy az alábbi diagram kommutatív, és mindhárom oszlopa egzakt. Bizonyítsuk be, hogy ha két szomszédos sora egzakt, akkor a harmadik is.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & C_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\lambda_1}\downarrow & & {\scriptstyle\mu_1}\downarrow & & {\scriptstyle\nu_1}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & C_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\lambda_2}\downarrow & & {\scriptstyle\mu_2}\downarrow & & {\scriptstyle\nu_2}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & C_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

12. *Legyenek* M_i *algebrai struktúrák. Azt mondjuk, hogy az* F *az* $\alpha_i : M_i \to F$ *homomorfizmusokkal együtt az* M_i *struktúrák* **szabad szorzata,** *ha minden* N*-re és* $\beta_i : M_i \to N$ *homomorfizmusokra egyértelműen létezik egy* $\psi : F \to N$ *homomorfizmus úgy, hogy minden* i*-re* $\psi\alpha_i = \beta_i$*. Határozzuk meg a szabad szorzatot a modulusok között; a halmazok között (művelet nincs); illetve a csoportok között akkor, ha az összes tényező szabad.*

13. *Tegyük fel, hogy* $\alpha : A \to C$ *és* $\beta : B \to C$ *modulushomomorfizmusok. Azt mondjuk, hogy az* M *modulus a* $\gamma : M \to A$ *és a* $\delta : M \to B$ *homomorfizmusokkal az előbbi két homomorfizmus* **pullback***-je, ha* $\alpha\gamma = \beta\delta$*, és bármely kommutatív*

$$\begin{array}{ccc}
M' & \xrightarrow{\gamma'} & A \\
{\scriptstyle\delta'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\
B & \xrightarrow{\beta} & C
\end{array}$$

diagram esetén egyértelműen létezik egy $\psi : M' \to M$ *homomorfimus, melyre* $\gamma\psi = \gamma'$ *és* $\delta\psi = \delta'$*. Mutassuk meg, hogy a pullback mindig létezik és egyértelmű. Fogalmazzuk meg és igazoljuk az állítás duálisát is (a duális fogalmat* **pushout***-nak nevezzük).*