Mat-alkmat szak, első évfolyam, első félév

Második zárthelyi **C** *(2005. dec. 13) — megoldásvázlatok*

1. A racionális gyökteszt miatt $-1/3$ gyök (2 pont). A gyöktényezőt kiemelve $(3x+1)(x^4-3x^3-3)$ adódik (2 pont). A második tényező irreducibilis a Schönemann-Eisenstein miatt (2 pont).

2. A Gauss-eliminációt elvégezve az utolsó sor $(0\ 0\ c+5 \mid 0)$ lesz (2 pont), az első két sorban pedig két vezéregyest kapunk úgy, hogy nem kellett osztani héttel osztható számmal, és így ez az átalakítás $\mathbb{Z}_7$ fölött is működik. Ahhoz, hogy $\mathbb{Z}_7$ fölött ne legyen egyértelmű a megoldás, az utolsó sor baloldalán csupa nulla kell, hogy álljon, azaz $c+5$ osztható 7-tel (2 pont). Viszont $c+5$ nem lehet nulla, mert akkor $\mathbb{C}$ fölött is végtelen sok megoldás lenne. Így például $c=2$ megfelelő (2 pont).

3. Ha reducibilis, akkor van legfeljebb harmadfokú irreducibilis osztója (1 pont). Elsőfokú osztója nincs, mert nincs $\mathbb{Z}_2$-ben gyöke (1 pont). Az x^2+x+1, x^3+x+1 és x^3+x^2+1 egyikével sem osztható $\mathbb{Z}_2$ fölött (mindegyik osztás 1 pont). Mivel más legfeljebb harmadfokú irreducibilis polinom nincs $\mathbb{Z}_2$ fölött, ezért a polinom irreducibilis (1 pont).

4. Igen, mert

$$\Phi_7(x^{21}) = \frac{(x^{21})^7-1}{x^{21}-1} = \frac{\Phi_1\Phi_7\Phi_{49}\Phi_3\Phi_{21}\Phi_{147}}{\Phi_1\Phi_3\Phi_7\Phi_{21}} = \Phi_{49}(x)\Phi_{147}(x)\,.$$

Második megoldás: A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon)=49$ esetén $o(\varepsilon^{21})=7$. Ezért $\Phi_{49}(x)$ minden gyöke $\Phi_7(x^{21})$-nek is gyöke. Mivel $\Phi_{49}(x)$ gyökei egyszeresek, az oszthatóság fennáll.

5. Ilyen a nullamátrix (1 pont), a $\pm 90^\circ$-os forgatás mátrixa (2 pont), továbbá a 180/18 fokos forgatás mátrixa is, hiszen ennek 18-adik hatványa az egységmátrix ellentettje (3 pont).

6. Az utolsó sort az elsőhöz adva $4n$ kiemelhető, és az első sor csupa 1 lesz. Ezt az utolsó sorból kivonva, és az utolsó oszlop, majd a kapott aldeterminánst az első oszlop szerint kifejtve kapjuk, hogy az eredeti determináns értéke $(4n)(2-4n)$-szer az a $(2n-2)\times(2n-2)$-es determináns, amelynek a főátlója 1, a mellékátlója $4n-1$ (3 pont). A Gauss-eliminációt végrehajtva (azaz a főátló alatti $4n-1$-eket a fölöttük lévő 1-esekkel kiejtve) a végeredmény $[(4n)(2-4n)]^n$ (3 pont).