**Mat-alkmat szak, első évfolyam, első félév**

*Második zárthelyi* **B** *(2005. dec. 13) — megoldásvázlatok*

**1.** A racionális gyökteszt miatt $-1/5$ gyök (2 pont). A gyöktényezőt kiemelve $(5x+1)(x^4+5x^2-5)$ adódik (2 pont). A második tényező irreducibilis a Schönemann-Eisenstein miatt (2 pont).

**2.** A Gauss-eliminációt elvégezve az utolsó sor $(0\ 0\ c+4 \mid 0)$ lesz (2 pont), az első két sorban pedig két vezéregyest kapunk úgy, hogy nem kellett osztani 11-gyel osztható számmal, és így ez az átalakítás $\mathbb{Z}_{11}$ fölött is működik. Ahhoz, hogy $\mathbb{Z}_{11}$ fölött ne legyen egyértelmű a megoldás, az utolsó sor baloldalán csupa nulla kell, hogy álljon, azaz $c+4$ osztható 11-gyel (2 pont). De $c+4$ nem lehet nulla, mert akkor $\mathbb{C}$ fölött is végtelen sok megoldás lenne. Így például $c=7$ megfelelő (2 pont).

**3.** Ha reducibilis, akkor van legfeljebb harmadfokú irreducibilis osztója (1 pont). Elsőfokú osztója nincs, mert nincs $\mathbb{Z}_2$-ben gyöke (1 pont). Az $x^2+x+1$, $x^3+x+1$ és $x^3+x^2+1$ egyikével sem osztható $\mathbb{Z}_2$ fölött (mindegyik osztás 1 pont). Mivel más legfeljebb harmadfokú irreducibilis polinom nincs $\mathbb{Z}_2$ fölött, ezért a polinom irreducibilis (1 pont).

**4.** Igen, mert

$$\Phi_7(x^{35}) = \frac{(x^{35})^7-1}{x^{35}-1} = \frac{\Phi_1\Phi_7\Phi_{49}\Phi_5\Phi_{35}\Phi_{245}}{\Phi_1\Phi_5\Phi_7\Phi_{35}} = \Phi_{49}(x)\Phi_{245}(x)\,.$$

*Második megoldás:* A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon)=49$ esetén $o(\varepsilon^{35})=7$. Ezért $\Phi_{49}(x)$ minden gyöke $\Phi_7(x^{35})$-nek is gyöke. Mivel $\Phi_{49}(x)$ gyökei egyszeresek, az oszthatóság fennáll.

**5.** Ilyen a nullamátrix (1 pont), a $\pm 90°$-os forgatás mátrixa (2 pont), továbbá a 180/22 fokos forgatás mátrixa is, hiszen ennek 22-edik hatványa az egységmátrix ellentettje (3 pont).

**6.** Az utolsó sort az elsőhöz adva $2n+1$ kiemelhető, és az első sor csupa 1 lesz. Ezt az utolsó sorból kivonva, és az első oszlop, majd a kapott aldeterminánst az utolsó oszlop szerint kifejtve kapjuk, hogy az eredeti determináns értéke $(1-2n)(1+2n)$-szer az a $(2n-2)\times(2n-2)$-es determináns, amelynek a főátlója 1, a mellékátlója $2n$ (3 pont). A Gauss-eliminációt végrehajtva (azaz a főátló alatti 1-eket a fölöttük lévő $2n$-ekkel kiejtve) a végeredmény $(4n^2-1)^n$ (3 pont).