

Mat-alkmat szak, első évfolyam, első félév
Második zárthelyi A (2005. dec. 13) — megoldásvázlatok

1. A racionális gyökteszt miatt $-1/3$ gyök (2 pont). A gyöktényezőt kiemelve $(3x+1)(x^4-3x+3)$ adódik (2 pont). A második tényező irreducibilis a Schönemann-Eisenstein miatt (2 pont).
2. A Gauss-eliminációt elvégezve az utolsó sor $(0 \ 0 \ c+7 \ | \ 0)$ lesz (2 pont), az első két sorban pedig két vezéregyest kapunk úgy, hogy nem kellett osztani öttel osztható számmal, és így ez az átalakítás \mathbb{Z}_5 fölött is működik. Ahhoz, hogy \mathbb{Z}_5 fölött ne legyen egyértelmű a megoldás, az utolsó sor baloldalán csupa nulla kell, hogy álljon, azaz $c+7$ osztható 5-tel (2 pont). Viszont $c+7$ nem lehet nulla, mert akkor \mathbb{C} fölött is végtelen sok megoldás lenne. Így például $c=3$ megfelelő (2 pont).
3. Ha reducibilis, akkor van legfeljebb harmadfokú irreducibilis osztója (1 pont). Elsőfokú osztója nincs, mert nincs \mathbb{Z}_2 -ben gyöke (1 pont). Az x^2+x+1 , x^3+x+1 és x^3+x^2+1 egyikével sem osztható \mathbb{Z}_2 fölött (mindegyik osztás 1 pont). Mivel más legfeljebb harmadfokú irreducibilis polinom nincs \mathbb{Z}_2 fölött, ezért a polinom irreducibilis (1 pont).
4. Igen, mert

$$\Phi_5(x^{35}) = \frac{(x^{35})^5 - 1}{x^{35} - 1} = \frac{\Phi_1 \Phi_5 \Phi_{25} \Phi_7 \Phi_{35} \Phi_{175}}{\Phi_1 \Phi_5 \Phi_7 \Phi_{35}} = \Phi_{25}(x) \Phi_{175}(x).$$

Második megoldás: A hatvány rendjének képlete miatt $o(\varepsilon) = 25$ esetén $o(\varepsilon^{35}) = 5$. Ezért $\Phi_{25}(x)$ minden gyöke $\Phi_5(x^{35})$ -nek is gyöke. Mivel $\Phi_{25}(x)$ gyökei egyszerezsek, az oszthatóság fennáll.

5. Ilyen a nullamátrix (1 pont), a $\pm 90^\circ$ -os forgatás mátrixa (2 pont), továbbá a $180/14$ fokos forgatás mátrixa is, hiszen ennek 14-edik hatványa az egységmátrix ellentettje (3 pont).
6. Az utolsó sort az elsőhöz adva $2n+1$ kiemelhető, és az első sor csupa 1 lesz. Ezt az utolsó sorból kivonva, és az utolsó oszlop, majd a kapott aldeterminánst az első oszlop szerint kifejtve kapjuk, hogy az eredeti determináns értéke $(1-2n)(1+2n)$ -szer az a $(2n-2) \times (2n-2)$ -es determináns, amelynek a főátlója 1, a mellékátlója $2n$ (3 pont). A Gauss-eliminációt végrehajtva (azaz a főátló alatti $2n$ -eket a fölöttük lévő 1-esekkel kiejtve) a végeredmény $(1-4n^2)^n$ (3 pont).